

Robert DYLEWSKI

Uniwersytet Zielonogórski, ul. Licealna 9, 65-417, Zielona Góra
Państwowa Wyższa Szkoła Zawodowa, ul. Teatralna 25, 66-400, Gorzów Wlkp.

Zastosowanie selekcji residualnej w metodach rzutowych dla problemów dopuszczalności liniowej

dr Robert DYLEWSKI

Doktorat uzyskany w roku 2003, z zakresu metod numerycznych i optymalizacji. Prowadzone zajęcia: programowanie matematyczne, badania operacyjne, podstawy optymalizacji, algorytmy i struktury danych, metody numeryczne. Tematyka badań naukowych: optymalizacja wypukła nieróżniczkowalna, metody rzutowe i zastosowania, własności i zastosowania sieci Petriego.



e-mail: r.dylewski@wmie.uz.zgora.pl

Streszczenie

W pracy rozważa się problem dopuszczalności liniowej (PDL), do którego sprowadza się wiele praktycznych problemów. Do rozwiązywania PDL zaproponowano metodę rzutową, w której do konstrukcji wektora rzutowego wykorzystuje się selekcję residualną. Podano też rozszerzenie metody do przypadku, gdy nie zakłada się niesprzeczności problemu. Przeprowadzono testy numeryczne, w których porównano prezentowaną metodę z innymi znanymi metodami.

Słowa kluczowe: selekcja residualna, metoda rzutowa, problem dopuszczalności liniowej.

Residual selection in projection methods for linear feasibility problems

Abstract

In this paper, we consider the linear feasibility problem. We propose a projection method with so called residual selection model. We present modification of this method, where we don't suppose that the system of linear inequalities is consistent. We present the results of numerical test for presented projection methods.

Keywords: residual selection, projection method, linear feasibility problem.

1. Wprowadzenie

W artykule rozważa się problem dopuszczalności liniowej, który można zapisać w następującej postaci:

Problem (PDL)

Dany jest układ nierówności liniowych

$$A^T x \leq b, \quad (1)$$

gdzie: A jest macierzą typu $n \times m$, $x \in R^n$ i $b \in R^m$.

Znaleźć rozwiązanie $x^* \in M_0 = \{x : A^T x \leq b\}$ lub stwierdzić, że $M_0 = \emptyset$.

W powyższym problemie nie zakłada się niesprzeczności. Rozważane są metody, które gwarantują zbieżność w przypadku, gdy zbiór rozwiązań $M_0 \neq \emptyset$; jeśli natomiast $M_0 = \emptyset$, to potrafią ten fakt wykryć.

Wiele innych problemów można sprowadzić do PDL. Na przykład zadanie programowania liniowego, czy ogólniejsze zadanie minimalizacji wypukłej z ograniczeniami liniowymi, gdzie funkcja celu jest kawałkami liniowa (ma postać maksimum funkcji liniowych) [1]. W wielu praktycznych zagadnieniach otrzymuje się do rozwiązania problemu postaci PDL, np. zagadnienie tomografii komputerowej (wyznaczanie przekroju obiektu), zagadnienie planowania radioterapii z użyciem wiązek o modulowanej intensywności, własności strukturalne (ograniczoność, powracalność) sieci Petriego [2]. Szeroki opis problemów postaci PDL zawarto w pracy [3]. Często w praktycznych problemach $M_0 = \emptyset$ albo nie wiadomo, czy zbiór rozwiązań M_0 jest pusty.

ność, powracalność) sieci Petriego [2]. Szeroki opis problemów postaci PDL zawarto w pracy [3]. Często w praktycznych problemach $M_0 = \emptyset$ albo nie wiadomo, czy zbiór rozwiązań M_0 jest pusty.

2. Metoda rzutowa dla problemu dopuszczalności liniowej

W punkcie tym rozważa się metody rzutowe służące do rozwiązywania problemu PDL. Niech $P_S(x) = \arg \min_{y \in S} \|y - x\|$ oznacza rzut metryczny punktu x na zbiór S . Metody rzutowe mają ogólną postać:

$$x_1 \in R^n - \text{dowolny} \quad (2)$$

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k t_k$$

gdzie wektor rzutowy

$$t_k = P_{M_k} x_k - x_k \quad (3)$$

i parametr relaksacyjny $\lambda_k \in (0, 2)$. Zbiór M_k ma postać:

$$M_k = \{x : A_{L_k}^T x \leq b_{L_k}\} \quad (4)$$

gdzie A_{L_k} jest podmacierzą macierzy A , składającą się z kolumn $L_k \subset J = \{1, 2, \dots, m\}$ i b_{L_k} jest podwektorem wektora b , składającym się ze współrzędnych o numerach ze zbioru $L_k \subset J$.

Metody rzutowe różnią się przede wszystkim wyborem nierówności (zbiór L_k) i w konsekwencji konstrukcją wektora rzutowego t_k . W najprostszych metodach zbiór L_k jest jednoelementowy, czyli t_k jest wektorem rzutowym na zbiór rozwiązań dla jednej nierówności. W metodzie największego residuum (M-nr) zbiór $L_k = \{i_k\}$, przy czym

$$i_k \in \arg \max_{i \in J} (A_i^T x - b_i) \quad (5)$$

gdzie A_i oznacza i -tą kolumnę macierzy A . Inne znane metody, w których $|L_k| = 1$ to metoda największej odległości, metoda cykliczna, metoda prawie cykliczna i metoda projekcji powtarzalnych [1].

3. Metoda rzutowa z selekcją residualną

Metody, w których $|L_k| = 1$ są dosyć proste, ale niestety wolno zbieżne do rozwiązania. W celu poprawienia zbieżności można do konstrukcji t_k wybierać więcej niż jedną nierówność z układu (1).

Niech $x_k^+ = P_{M_k} x_k$. Jeżeli macierz A_{L_k} jest pełnego rzędu kolumnowego, to układ równań $A_{L_k}^T x = b_{L_k}$ posiada rozwiązanie i rzut metryczny x_k na $M_k = \{x : A_{L_k}^T x = b_{L_k}\}$ wynosi [4, 5]:

$$x_k^+ = P_{M_k} x_k = x_k - A_{L_k} (A_{L_k}^T A_{L_k})^{-1} (A_{L_k}^T x_k - b_{L_k}). \quad (6)$$

Oczywiście, x_k^+ nie musi być równe x_k^* . Można pokazać [4, 5], że

$$x_k^+ = x_k^* \Leftrightarrow y = (A_{L_k}^T A_{L_k})^{-1} (A_{L_k}^T x_k - b_{L_k}) \geq 0. \quad (7)$$

W pracy [1] wprowadzono tzw. selekcję stożka rozwartego i szczególnie przypadek tej selekcji, metodę selekcji regularnego stożka rozwartego (M-srsr), które gwarantują spełnienie warunków: $(A_{L_k}^T A_{L_k})^{-1} \geq 0$ oraz $(A_{L_k}^T x_k - b_{L_k}) \geq 0$. W konsekwencji zachodzi $y \geq 0$. W pracach [4, 5] wprowadzono metodę selekcji residualnej (dla zadania minimalizacji wypukłej nieróżniczkowal-

nej), w której zakłada się, że $y \geq 0$ bez konieczności spełnienia warunku $(A_{L_k}^T x_k - b_{L_k}) \geq 0$. W pracy [6] zastosowano metodę selekcji residualnej (M-sr) w metodzie rzutowej dla problemu PDL i pokazano zbieżność w przypadku, gdy $M_0 \neq \emptyset$. Oczywiście, przy sprawdzaniu warunku $y \geq 0$ i konstrukcji wektora rzutowego t_k metodą M-sr nie trzeba wyznaczać odwrotności macierzy $A_{L_k}^T A_{L_k}$; wykorzystuje się rozkład Cholesky'ego z aktualizacją [7].

Rozważmy teraz ogólniejszą sytuację; nie zakłada się, że $M_0 \neq \emptyset$. Jeżeli rozkład Cholesky'ego macierzy $A_{L_k}^T A_{L_k}$ zostanie przerwany, to oznacza, że $M_0 = \emptyset$ (patrz [6, Theorem 1]). Jeżeli natomiast rozkład Cholesky'ego zakończy się pomyślnie, to $x_k^+ = P_{M_k} x_k = x_k + t_k$ dla $t_k = -A_{L_k} y$ (patrz [6, Corollary 2]). W konsekwencji, jeżeli $M_0 \neq \emptyset$ i ciąg x_k generowany jest przez (2, 3, 4) z L_k wyznaczanym metodą M-sr, to zachodzi (patrz [6, Theorem 5]):

$$\max\{0, A_i^T x_k - b_i : i = 1, 2, \dots, m\} \rightarrow 0. \quad (8)$$

Wprowadźmy teraz metodę, która jest pewną modyfikacją metody rzutowej (2, 3, 4) z selekcją M-sr. Podobną ideę zaproponowano dla metody rzutowania naprzemiennego [8, 9]. Niech d_k oznacza tolerancję na spełnienie nierówności układu (1),

$$\bar{d}_k = (1 - \mu)\bar{d}_k + \mu \underline{d}_k, \quad (9)$$

gdzie: $\bar{d}_k = \min_{1 \leq j \leq k} \max\{0, A_i^T x_j - b_i : i = 1, 2, \dots, m\}$, $\underline{d}_k = 0$ i $\mu \in (0, 1]$. Ponadto, wprowadźmy zamiast zbioru M_k zdefiniowanego w (4) zbiór

$$M_k^d = \{x : A_{L_k}^T x \leq b_{L_k} + d_k\} \quad (10)$$

Uwagi:

- 1) Jeśli $\mu = 1$, to $M_k^d = M_k$ dla każdego k .
- 2) Jeśli dla pewnego k rozkład Cholesky'ego zostanie przerwany, to oznacza, że $M_k^d = \emptyset$, w konsekwencji też $M_0 = \emptyset$. Można wtedy zakończyć metodę z odpowiedzią, że problem PDL jest sprzeczny, albo kontynuować przyjmując $\underline{d}_k = d_k$ ponieważ $\min_{x \in \mathbb{R}^n} \max\{0, A_i^T x - b_i : i = 1, 2, \dots, m\} \geq d_k$.
- 3) Jeśli $d_k \geq \min_{x \in \mathbb{R}^n} \max\{0, A_i^T x - b_i : i = 1, 2, \dots, m\}$ dla każdego k , to $M_k^d \neq \emptyset$ i w konsekwencji dla x_k zachodzi $\max\{0, A_i^T x - b_i - d_k : i = 1, 2, \dots, m\} \rightarrow 0$ (patrz (8)).
- 4) Jeśli dla pewnego k zachodzi $\bar{d}_k \leq \varepsilon$ dla danego ε , to oznacza, że x_k jest rozwiązaniem ε -optymalnym, czyli $A_i^T x - b_i \leq \varepsilon$ dla każdej nierówności $i = 1, 2, \dots, m$.

4. Wyniki testów numerycznych

W punkcie tym przedstawiono wyniki dla metody rzutowej opisaną w punkcie 2, gdzie do wyboru nierówności (zbioru L_k) i konstrukcji wektora rzutowego zastosowano metody: (1) M-nr – największego residuum, (2) M-srsr – selekcji regularnego stożka rozwartego i (3) M-sr – selekcji residualnej. Przyjęto $\lambda_k = 1$. W kryterium zatrzymania tolerancja optymalności wynosiła $\varepsilon = 10^{-6}$.

Wygenerowano losowo po 10 przykładów dla każdego układu parametrów n, m, l . Współrzędne lewych stron nierówności zostały wygenerowane losowo z przedziału $(-0.5, 0.5)$. Dla $i = 1, 2, \dots, l$ przyjęto $b_i = 0$, a dla $i = l + 1, \dots, m$ współrzędne wektora b wygenerowano losowo z przedziału $(0, 1)$, podobnie współrzędne punktów startowych. Zagwarantowano więc niesprzeczność problemu PDL. Wartość l natomiast wpływa na wielkość zbioru rozwiązań. Wyniki testów przedstawiono w tabeli 1, przy czym k_i oznacza średnią liczbę iteracji potrzebną do uzyskania rozwiązania ε -optymalnego.

Tab. 1. Wyniki testów numerycznych
Tab. 1. Results of numerical tests

		M-nr	M-srsr	M-sr
$n \times m$	l	k_1	k_2	k_3
20×20	12	65	12	6
	20	220	40	7
20×40	12	222	30	8
	24	1091	168	14
20×80	12	231	44	11
	24	2210	479	18
50×50	30	295	41	19
	50	542	75	33
50×100	30	1536	252	35
	60	2521	461	145
50×200	30	1322	156	69
	60	3773	583	122
100×100	60	597	86	49
	100	941	133	77
200×200	120	1826	230	97
	200	1858	242	164

Można zaobserwować przewagę metody drugiej nad pierwszą i trzeciej nad drugą. Do wyboru podukładu równań i konstrukcji wektora rzutowego, w przypadku pierwszej metody, brana jest zawsze tylko jedna nierówność wyjściowego układu nierówności. W drugiej metodzie liczba wybieranych nierówności wynosiła od 2 do 8, stąd dużo lepsze wyniki. Trzecia metoda umożliwia wybieranie też nierówności, które są wprawdzie spełnione w aktualnym przybliżeniu rozwiązania, ale pozwala to dodatkowo niewielkim kosztem zwiększyć długość wektora rzutowego, bez utraty zbieżności.

5. Podsumowanie

Wyniki testów numerycznych wskazują na przewagę metody selekcji residualnej nad metodą selekcji regularnego stożka rozwartego. Obydwie te metody są dużo lepsze od metod, w których do konstrukcji wektora rzutowego wybiera się tylko jedną niespełnioną nierówność. Dodatkowo, zastosowanie rozkładu Cholesky'ego pozwala na wykrycie kiedy układ nierówności jest sprzeczny i zastosowanie metody do wyznaczania rozwiązania ε -optymalnego.

6. Literatura

- [1] Cegielski A.: Metody relaksacyjne w problemach optymalizacji wypukłej. Monografie 67. WSI, Zielona Góra, 1993.
- [2] Zaitsev D. A.: Compositional analysis of Petri nets. Cybernetics and Systems Analysis, vol. 42, no. 1, 2006, 126-136.
- [3] Deutsch F.: The method of alternating orthogonal projections. Approximation Theory, Spline Functions and Applications, Kluwer Academic Publ., The Netherlands, 105-121, 1992.
- [4] Cegielski A., Dylewski R., Selection strategies in projection methods for convex minimization problems. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 22, 2002, 97-123.
- [5] Cegielski A., Dylewski R., Residual selection in a projection method for convex minimization problems. Optimization, 52, 2003, 211-220.
- [6] Dylewski R.: Projection method with residual selection for linear feasibility problems. Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization, 27, 2007, 43-50.
- [7] Kielbasiński A., Schwetlick H., Numeryczna algebra liniowa. Wyd. Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1992.
- [8] Cegielski A., Dylewski R., Variable target value relaxed alternating projection method. Computational Optimization and Applications, 47, 2010, 455-476.
- [9] Dylewski R., Uogólnienie metody rzutowania naprzemiennego. Pomiar Automatyka Kontrola, 06, 2011, 679-682.