

Remigiusz WIŚNIEWSKI, Łukasz STEFANOWICZ

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki, ul. Licealna 9, 65-417 Zielona Góra

Zastosowanie hipergrafów w procesie selekcji implikantów prostych

dr inż. Remigiusz WIŚNIEWSKI

Absolwent Uniwersytetu Zielonogórskiego, pracę doktorską obronił w 2008 roku. W latach 2000-2001 dwukrotnie odbył przemysłową praktykę studencką w firmie Aldec Inc. w Stanach Zjednoczonych.

Aktualnie pracuje jako adiunkt (Uniwersytet Zielonogórski). Zainteresowania badawcze obejmują zagadnienia z zakresu teorii grafów i hipergrafów, bezpieczeństwa danych i kryptologii oraz metodologii projektowania i implementacji systemów cyfrowych z wykorzystaniem struktur programowalnych FPGA.

e-mail: R.Wisniewski@iie.uz.zgora.pl**mgr inż. Łukasz STEFANOWICZ**

Absolwent Uniwersytetu Zielonogórskiego, pracę magisterską obronił w 2011 roku. Jest słuchaczem studiów doktoranckich, specjalność informatyka. Członek PTI oraz Uczelnianego Koła Naukowego. Aktywnie uczestniczy w realizacji pokazów naukowych o zasięgu krajowym oraz międzynarodowym. Zainteresowania badawcze obejmują zagadnienia z zakresu teorii grafów oraz hipergrafów w kontekście sterowników logicznych.

e-mail: L.Stefanowicz@weit.uz.zgora.pl

Streszczenie

W referacie przedstawiona zostanie nowa koncepcja selekcji implikantów prostych w procesie dwupoziomowej minimalizacji funkcji logicznych. Aktualnie znane metody selekcji bazują na połączeniu metod dokładnych (tzw. Cyclic Core) z przybliżonymi. W artykule zaproponowana zostanie nowatorska metoda selekcji, która w całości opiera się na metodach dokładnych. Najbardziej istotną zaletą proponowanego rozwiązania jest wielomianowa złożoność obliczeniowa. Zastosowanie hipergrafów typu xt pozwala przeprowadzić operację selekcji nawet dla 95% funkcji logicznych (wartość ta jest uzależniona od liczby zmiennych), co potwierdzają wstępne badania eksperymentalne.

Słowa kluczowe: minimalizacja funkcji logicznych, selekcja implikantów prostych, hipergraf, transwersala dokładna.

Application of hypergraphs in the prime implicants selection process

Abstract

In the paper a new idea for the selection of prime implicants is proposed. The method is based on the two-level minimization process of the Boolean functions, according to the Quine-McCluskey approach. Initially, the set of prime implicants for the logic function ought to be calculated. Next, the selection process is applied, to achieve the minimal formula. Such an operation is a typical covering problem and in general case it has exponential computational complexity. In the paper we propose a new prime implicants selection method. An idea is based on the hypergraph theory. We will show that most of logic functions can be reduced to xt -hypergraphs, where exact transversals can be calculated in polynomial time.

Keywords: minimization of Boolean functions, selection of prime implicants, hypergraph, exact transversal.

1. Wprowadzenie

Minimalizacja funkcji logicznych to jedna z podstawowych operacji algebry Boole'a, wykorzystywana podczas projektowania systemów cyfrowych w celu zmniejszenia kosztów produkcji poprzez usunięcie zbędnych bramek [1, 2, 3]. Choć powszechnie używana jest nazwa „minimalizacja funkcji”, faktycznie redukcja ulega formuła opisująca daną funkcję logiczną.

Tradycyjne i najbardziej znane algorytmy, bazują na wykorzystaniu dwupoziomowej metody minimalizacji. W pierwszej fazie wyznaczane są implikanty proste funkcji logicznej, natomiast drugi etap to ich selekcja. Tak funkcjonuje graficzna metoda siatek (map) Karnaugh'a, oraz bardziej zaawansowany algorytm Quine'a-McCluskey'a (QMC) [2, 10, 11].

Pomimo, że metody te powstały ponad pół wieku temu, do dziś są powszechnie stosowane, a wszelkie nowatorskie pomysły w większości stanowią rozwinięcie lub częściowe ulepszenie dwupoziomowego algorytmu minimalizacji. Podstawowym problemem, zarówno podczas wyznaczania, jak i selekcji implikantów prostych, jest wykładnicza złożoność obliczeniowa

tych operacji [3]. Dlatego też ośrodki naukowe oraz firmy komercyjne intensywnie poszukują efektywnych metod, usprawniających cały proces minimalizacji. Szczególnie popularne są algorytmy algebriczne oraz genetyczne [12, 13].

2. Sformułowanie problemu

Pomimo wielu odmian, generalna zasada wszystkich metod dwupoziomowej minimalizacji funkcji logicznych jest podobna.

Pierwszy krok to wyznaczenie zbioru implikantów prostych, które są najczęściej zastawiane w formie tablicy mintermów oraz pokrywających je implikantów prostych. Selekcja sprowadza się do znalezienia pokrycia jak najmniejszą liczbą implikantów wszystkich mintermów funkcji. Proces ten można zasadniczo podzielić na dwa etapy: redukcja tablicy pokrycia metodą dokładną oraz selekcja implikantów prostych na podstawie tablicy pokrycia. Etap drugi (selekcja) w ogólnym przypadku jest wykładniczy, z uwagi na co stosowane są metody przybliżone.

W niniejszym artykule proponujemy innowacyjne podejście w kwestii właściwej selekcji implikantów prostych. Uzyskana tablica pokrycia jest obrazowana za pomocą hipergrafu selekcji. Następnie, weryfikowana jest klasa hipergrafu selekcji. Jeśli należy on do klasy hipergrafów typu xt [17], to oznacza, że cały proces selekcji może zostać przeprowadzony w czasie wielomianowym. W takim przypadku problem pokrycia sprowadza się do znalezienia pierwszej transwersali dokładnej i wiąże się z wielomianową złożonością obliczeniową [17, 18].

W referacie ograniczono się do gruntownej analizy drugiego z etapów minimalizacji funkcji logicznych. Przyjęto, że w pierwszym etapie wyznaczone zostały wszystkie implikanty proste dla danej funkcji, a celem jest sprawdzenie, czy dokładny proces selekcji może zostać wykonany w czasie wielomianowym. Oczywiście, nawet jeśli selekcja będzie miała złożoność wielomianową, to sam proces wyznaczania implikantów prostych może być wykładniczy. Ten aspekt jest jednakże poruszany w wielu publikacjach [2, 3, 12], gdzie proponowane są różne sposoby usprawniające operację wyznaczania implikantów prostych (metody heurystyczne, także takie, które generują ograniczony zbiór implikantów prostych).

3. Idea proponowanej metody

Proponowana metoda selekcji implikantów prostych wykorzystuje własności hipergrafów oraz transwersal dokładnych. Pierwszy etap jest taki sam jak w podejściu klasycznym; wykonywana jest operacja redukcji tablicy pokrycia (Cyclic Core). Następnie, uzyskane rezultaty zestawiane są w formie hipergrafu selekcji. Jego wierzchołki odpowiadają implikantom prostym, natomiast krawędzie obrazują mintermy funkcji. W dalszej fazie, weryfikowana jest klasa hipergrafu. Jeśli jest on hipergrafem transwersal dokładnych, to oznacza, że cały proces selekcji może zostać wykonany wielomianowo. Wówczas obliczana jest pierwsza trans-

wersala dokładna, która jednoznacznie wskazuje szukane implikanty proste. Jeśli jednak okaże się, że hipergraf selekcji nie należy do klasy xt , wówczas proponowana metoda nie może zostać zastosowana i rozwiązanie zostaje znalezione z wykorzystaniem metod przybliżonych. Koncepcja proponowanej metody została przedstawiona na rys. 1. W ramce oznaczono najistotniejsze operacje proponowanego rozwiązania.

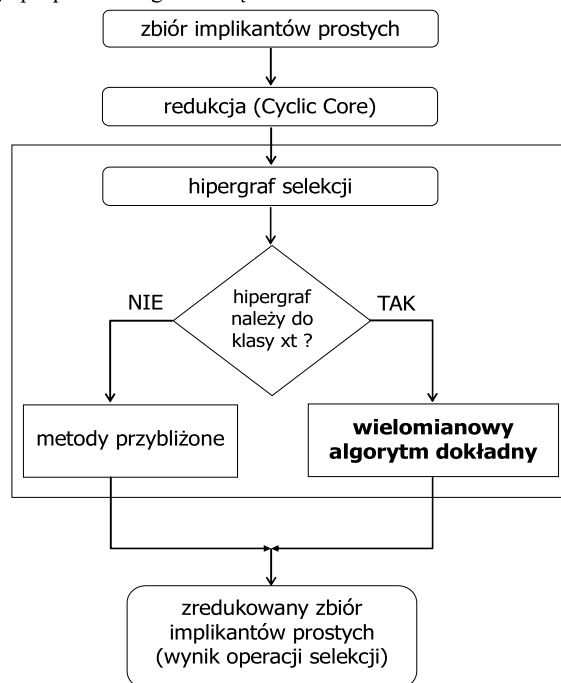


Fig. 1. Flow-chart that shows an idea of the proposed method
Rys. 1. Schemat ilustrujący ideę proponowanej metody selekcji

Przedstawiona metoda selekcji implikantów prostych może zostać podzielona na następujące fazy:

1. **Redukcja tablicy pokrycia metodą dokładną.** Etap ten jest wykonywany zgodnie z procedurą opisaną w [16].
2. **Określenie hipergrafu selekcji H_S .** W tym kroku implikanty proste zredukowanej tablicy zostają zobrazowane za pomocą wierzchołków, natomiast mintermy za pomocą krawędzi hipergrafu selekcji H_S .
3. **Sprawdzenie, czy hipergraf selekcji jest hipergrafem transwersal dokładnych.** Test wykonywany jest zgodnie z procedurą przedstawioną w [17].
4. **Jeśli H_S jest hipergrafem transwersal dokładnych,** szukana jest pierwszą najmniejsza transwersala dokładna. Proces ten ma wielomianową złożoność obliczeniową [17, 18]. Efektywną implementację algorytmu pokazano w [20] oraz [18].
5. **Jeśli H_S nie należy do klasy xt ,** wówczas poszukiwane jest rozwiązanie przybliżone. W szczególności może to być na przykład znalezienie transwersali T w hipergrafie H_S . Istnieje możliwość zastosowania algorytmów dokładnych, jednakże ich złożoność obliczeniowa jest wykładnicza [19, 20].

Szukane rozwiązanie stanowi zbiór implikantów prostych, określonych na podstawie transwersali hipergrafu H_S obliczonej w punkcie 4 lub 5.

4. Wnioski

W artykule zaprezentowano innowacyjny algorytm selekcji implikantów prostych w procesie minimalizacji funkcji logicznych. Przedstawiona koncepcja bazuje na dwupoziomowej metodzie minimalizacji, w której najpierw określone są implikanty proste. Wynik tej operacji jest następnie obrazowany za pomocą hipergrafu, którego wierzchołki odpowiadają wyznaczonym implikantom prostym, zaś krawędzie mintermom funkcji. Po wstępnej redukcji określany jest typ hipergrafu selekcji. Jeśli należy on do klasy xt , wówczas cały proces selekcji jest przeprowadzany wielomianowo. W przeciwnym wypadku zastosowanie mają klasyczne metody wyznaczania transwersali hipergrafu. Celem proponowanej metody jest redukcja złożoności obliczeniowej, jeśli hipergraf selekcji należy do klasy xt . Sprawdzenie typu hipergrafu oraz wyznaczenie transwersali dokładnej w hipergrafie xt wiąże się z wielomianową złożonością obliczeniową, natomiast w przypadku ogólnym jest to problem wykładniczy.

5. Literatura

- [1] De Micheli G., Synthesis and Optimization of Digital Circuits, McGraw-Hill, New York, NY, 1994.
- [2] Coudert O. – Two-Level Logic Minimization: An Overview, Integration Vol. 17, No. 2, pp. 97-140, Oct. 1994.
- [3] Coudert O., Madre J. C., Fraisse H. – A New Viewpoint on Two-Level Logic Minimization, Proc. 30th Design Automation Conference, Dallas, TX, USA, pp. 625-630, June 1993
- [4] Maxfield C., The Design Warrior's Guide to FPGAs, Academic Press, Inc., Orlando, FL, 2004.
- [5] Łuba T., Synteza układów cyfrowych, WKŁ, Warszawa, 2003.
- [6] Kania D., Układy logiki programowalnej, PWN, Warszawa, 2012.
- [7] Barkalov A., Titarenko L., Logic synthesis for FSM-based control units, Lecture Notes in Electrical Engineering, Vol. 53. Springer-Verlag, Berlin, 2009.
- [8] Grobelna I., "Formal verification of embedded logic controller specification with computer deduction in temporal logic", Przegląd Elektrotechniczny, 12a, 40-43, 2011.
- [9] Milik A., Hryniewicz E., "Synthesis and implementation of reconfigurable PLC on FPGA platform", International Journal of Electronics and Telecommunications, 58 (1), 85-94, 2012.
- [10] Quine W.V.O., The problem of simplifying truth functions, American Math. Monthly, Vol. 59, pp. 521-531, 1952.
- [11] McCluskey E. J., Introduction to the Theory of Switching Circuits, McGraw-Hill, New York, 1965.
- [12] Nosrati M., Karimi R., Hariri M., Minimization of Boolean Functions Using Genetic Algorithm, Annals. Computer Science Series, Vol. X, 2012.
- [13] Nosrati M., Hariri M.: An Algorithm for Minimizing of Boolean Functions Based on Graph DS, World Applied Programming Vol. 1 No.3, p. 209-214, 2011
- [14] Mohana Ranga Rao R.: An Innovative procedure to minimize Boolean function, International Journal of Advanced Engineering Sciences and Technologies, Vol. 3, No. 1, 012-014, 2011
- [15] Coudert O., Sasao T.: Two-Level Logic Minimization, Logic Synthesis and Verification, S. Hassoun & T. Sasao Editors, Kluwer Academic Publishers, Chapter 1, pp. 167-196, 2001
- [16] Rudell R. L.: Logic Synthesis for VLSI Design. Rozprawa doktorska, EECS Department, University of California, Berkeley, 1989.
- [17] Eiter T.: Exact Transversal Hypergraphs and Application to Boolean μ -Functions. Journal of Symbolic Computation, Vol. 17, No. 3, pp. 215-225, 1994.
- [18] Wiśniewska M., Application of hypergraphs to the decomposition of the discrete systems, Lecture Notes in Control and Computer Science, Vol. 23. Univ. of Zielona Góra Press, Zielona Góra, 2012.
- [19] Berge C.: Graphs and Hypergraph. Amsterdam: North-Holland Mathematical Library, 1976.
- [20] Knuth D.: Dancing Links, Stanford University, 2000, <http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/papers/dancing-color.ps.gz>
- [21] Adamski M., Karatkevich A., Węgrzyn M. (ed.): Design of Embedded Control Systems. NY, Springer Science, 2005.