

Sergiusz SIENKOWSKI¹, Elżbieta KAWECKA², Piotr MRÓZ²

¹UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej, ul. Podgórna 50, 65-246, Zielona Góra

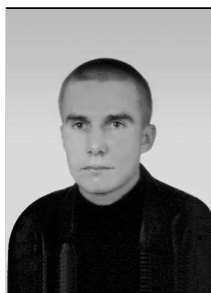
²UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki, ul. Podgórna 50, 65-246, Zielona Góra

Wyznaczanie funkcji autokorelacji na podstawie sześciu próbek sygnału sinusoidalnego

Dr inż. Sergiusz SIENKOWSKI

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001 r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003 r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.

e-mail: S.Sienkowski@ime.uz.zgora.pl



Dr inż. Elżbieta KAWECKA

Absolwentka Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2000r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się następującymi zagadnieniami: estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, przetwarzanie A/C z sygnałem ditherowym, niepewność pomiaru, technika korelacyjna.

e-mail: E.Kawicka@iie.uz.zgora.pl



Dr inż. Piotr MRÓZ

Absolwent Wydziału Automatyki i Metrologii Elektrycznej Wyższej Szkoły Inżynierskiej w Zielonej Górze (1990r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się konstruowaniem urządzeń pomiarowych oraz stanowisk i systemów do testowania urządzeń pomiarowych i pomiarowo-sterujących.

e-mail: P.Mrozi@iie.uz.zgora.pl



Streszczenie

W artykule pokazano, że w ustalonej chwili czasowej rzeczywiste wartości funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego można wyznaczyć w sposób jednoznaczny na podstawie trzech próbek sygnału i trzech próbek jego własnej, przesuniętej w czasie kopii. Na tej podstawie opracowano algorytm umożliwiający wyznaczanie autokorelogramu. Zastosowanie opracowanego algorytmu skutkuje istotnym zmniejszeniem czasochłonności wyznaczania autokorelogramu.

Słowa kluczowe: funkcja autokorelacji, autokorelogram, złożoność obliczeniowa, czasochłonność

Determining autocorrelation function values from six sinusoidal signal samples

Abstract

In the paper, it is shown that at a given moment of time the actual values of the sinusoidal signal autocorrelation function can be determined in an unambiguous way on the basis of three samples of the signal and three samples of its time-shifted copy. Based on this, an algorithm making it possible to determine an autocorrelation function has been devised. The employment of the devised algorithm substantially reduces the time consumption of determining an autocorrelation function.

Keywords: autocorrelation function, autocorrelation function, time complexity, time consumption

1. Wstęp

Funkcja autokorelacji stanowi uznaną narzędzie analizy własności i porównywania sygnałów. W wielu zastosowaniach praktycznych funkcję autokorelacji stosuje się do sprawdzania, w jakim stopniu wartość sygnału w ustalonej chwili czasowej wpływa na wartość sygnału w pewnej chwili w przyszłości. Takie badanie polega na porównywaniu sygnału ze swoją własną, przesuniętą w czasie kopią. W praktyce rzeczywiste wartości funkcji autokorelacji sygnału wyznacza się lub szacuje na podstawie próbek sygnału. Na tej podstawie sporządza się autokorelogram, który jest graficzną i liczbową reprezentacją funkcji autokorelacji.

Autokorelogram wyznacza się w celu badania własności funkcji autokorelacji. Ze względu na kwadratową złożoność obliczeniową algorytmu autokorelacyjnego wyznaczanie autokorelogramu jest czasochłonne. W artykule pokazano, że w ustalonej chwili czasowej rzeczywiste wartości funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego można wyznaczyć w sposób jednoznaczny na podstawie trzech próbek sygnału i trzech próbek jego własnej, przesuniętej w czasie kopii. Wtedy wyznaczanie autokorelogramu może odbywać się z zastosowaniem algorytmu o liniowej złożoności obliczeniowej. Skutkuje to istotnym zmniejszeniem czasochłonności wyznaczania autokorelogramu.

2. Funkcja autokorelacji sygnału sinusoidalnego

Funkcję autokorelacji ciągłego w czasie $t \in \mathbf{R}$ ergodycznego sygnału okresowego $x(t)$ definiujemy w następujący sposób [1, 2]:

$$R_{x(t)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt, \quad (1)$$

gdzie $T \in \mathbf{R}_+$ to okres, $\tau \in \mathbf{R}$ to opóźnienie sygnału $x(t)$.

Niech $x(t)$ będzie sygnałem sinusoidalnym opisywanym wzorem:

$$x(t) = A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right), \quad (2)$$

gdzie $A \in \mathbf{R}_+$ to amplituda, $A_0 \in \mathbf{R}$ to składowa stała, $\varphi \in \mathbf{R}$ to faza początkowa sygnału $x(t)$.

Na podstawie wzorów (1) i (2) otrzymujemy [1, 2]:

$$R_{x(t)}(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt = A_0^2 + \frac{A^2}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau\right). \quad (3)$$

W praktyce sygnał (2) podlega próbkowaniu tzn. dyskretyzacji w dziedzinie czasu. Rozważmy podejście klasyczne i założmy, że próbkowanie jest równomierne oraz, że spełnione jest twierdzenie o próbkowaniu. Wtedy na podstawie M próbek:

$$x[i] = x\left(i \frac{T}{M}\right) = A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{M}i + \varphi\right), \quad i = 0, 1, \dots, M-1, \quad (4)$$

$$\begin{aligned} x[i+k] &= x\left((i+k) \frac{T}{M}\right) \\ &= A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{M}(i+k) + \varphi\right), \quad k = 0, 1, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (5)$$

na okres sygnału (2) otrzymujemy wielkość:

$$\begin{aligned} R_{x[i]}[k] &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x[i] x[i+k] \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x\left(\frac{T}{M}i\right) x\left(\frac{T}{M}(i+k)\right) \\ &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left(A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{M}i + \varphi\right) \right) \left(A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{M}(i+k) + \varphi\right) \right), \end{aligned} \quad (6)$$

na podstawie której oszacować można wartości funkcji (3).

Wielkość (6) stanowi opis matematyczny algorytmu iteracyjnego umożliwiającego wyznaczenie autokorelogramu. Można zauważyć, że ilość istotnych operacji potrzebnych do wyznaczenia autokorelogramu jest równa M^2 . Wobec powyższego złożoność obliczeniowa algorytmu jest kwadratowa.

W celu porównania ze sobą wielkości (3) i (6) należy wartości tych wielkości wyznaczyć w tej samej, ustalonej chwili czasowej. Wymaga to znalezienia związku między opóźnieniami k i τ . Założmy, że dla dowolnej, ustalonej wartości τ_0 opóźnienia τ istnieje wartość:

$$k_0 = \frac{M}{T} \tau_0, \quad (7)$$

opóźnienia k taka, że $k_0 \in \mathbb{N}$. Wtedy wartości wielkości (3) i (6) są wyznaczane w tej samej chwili czasowej.

3. Wyznaczanie wartości funkcji autokorelacji na podstawie sześciu próbek sygnału sinusoidalnego

Sformułujmy następujące twierdzenie:

Twierdzenie

Jeżeli dla dowolnej, ustalonej wartości τ_0 opóźnienia τ istnieje wartość:

$$k_0 = \frac{3}{T} \tau_0, \quad (8)$$

opóźnienia k , taka że $k_0 \in \mathbb{N}$, to dla $M=3$ początkowych próbek sygnału (2) i $M=3$ początkowych próbek jego własnej, przesuniętej w czasie kopii otrzymujemy $R_{x[i]}[k_0] = R_{x(i)}(\tau_0)$.

Dowód. Przyjmijmy $M=3$, wówczas na podstawie (6) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_{x[i]}[k_0] &= \frac{1}{3} \sum_{i=0}^2 x[i] x[i+k_0] = \frac{1}{3} x[0] x[k_0] + \frac{1}{3} x[1] x[k_0+1] \\ &\quad + \frac{1}{3} x[2] x[k_0+2] = \frac{1}{3} x(0) x\left(\frac{T}{3}k_0\right) \\ &\quad + \frac{1}{3} x\left(\frac{T}{3}\right) x\left(\frac{T}{3}(k_0+1)\right) + \frac{1}{3} x\left(\frac{2T}{3}\right) x\left(\frac{T}{3}(k_0+2)\right), \end{aligned} \quad (9)$$

gdzie:

$$\begin{aligned} x(0) &= A_0 + A \sin(\varphi), \quad x\left(\frac{T}{3}\right) = A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{3} + \varphi\right), \\ x\left(\frac{2T}{3}\right) &= A_0 + A \sin\left(\frac{4\pi}{3} + \varphi\right), \\ x\left(\frac{T}{3}k_0\right) &= A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{3}k_0 + \varphi\right), \\ x\left(\frac{T}{3}(k_0+1)\right) &= A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{3}(k_0+1) + \varphi\right), \\ x\left(\frac{T}{3}(k_0+2)\right) &= A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{3}(k_0+2) + \varphi\right). \end{aligned} \quad (10)$$

Zwróćmy uwagę, że k_0 przyjmuje wartości 0, 1 i 2 natomiast τ_0 wartości 0, $T/3$ i $2T/3$. Wtedy wartości wielkości (3) i (9) wyznaczone są w tych samych chwilach czasowych.

Po uproszczeniu, zależność (9) można zapisać w następujący sposób:

$$R_{x[i]}[k_0] = A_0^2 + \frac{A^2}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{3}k_0\right). \quad (11)$$

Przyjmując zgodnie z (8) $k_0 = 3\tau_0/T$ i kładąc k_0 w (11) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} R_{x[i]}[k_0] &= R_{x(i)}\left[\frac{3}{T}\tau_0\right] \\ &= A_0^2 + \frac{A^2}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T}\tau_0\right) = R_{x(i)}(\tau_0). \quad \blacksquare \end{aligned} \quad (12)$$

Dowodniono, że do wyznaczenia w sposób jednoznaczny rzeczywistej wartości funkcji autokorelacji $R_{x(i)}(\tau)$ sygnału (2) wystarczy $M=3$ początkowe próbki sygnału i $M=3$ początkowe próbki jego własnej, przesuniętej w czasie kopii.

Powyższe rozważania prowadzą do zależności:

$$\begin{aligned} R_{x[i]}[k] &= \frac{1}{3} x(0) x\left(\frac{T}{3}k\right) + \frac{1}{3} x\left(\frac{T}{3}\right) x\left(T\left(\frac{k}{3} + \frac{1}{3}\right)\right) \\ &\quad + \frac{1}{3} x\left(\frac{2T}{3}\right) x\left(T\left(\frac{k}{3} + \frac{2}{3}\right)\right), \end{aligned} \quad (13)$$

która stanowi opis matematyczny algorytmu iteracyjnego umożliwiającego wyznaczenie autokorelogramu sygnału sinusoidalnego. Ze wzoru (13) wynika, że ilość istotnych operacji potrzebnych do wyznaczenia autokorelogramu jest równa $3M$. Zatem złożoność obliczeniowa algorytmu jest liniowa. Ponieważ $M^2/3M = M/3$, to w porównaniu z algorytmem opisanym wzorem (6) nastąpi $M/3$ -krotne zmniejszenie czasochłonności wyznaczania autokorelogramu.

4. Podsumowanie

W artykule pokazano, że rzeczywiste wartości funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego można wyznaczać na podstawie sześciu próbek sygnału. Pokazano również, że uzyskane wyniki można zastosować do opracowania algorytmu umożliwiającego zmniejszenie czasochłonności wyznaczania autokorelogramu, bez utraty informacji o funkcji autokorelacji.

Autorzy artykułu przedstawili wyniki badań dotyczące funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego mając na uwadze, że taka funkcja jest znana, a jej rzeczywiste wartości można wyznaczyć ze wzoru całkowitego. W takim przypadku wyznaczenie rzeczywistych wartości funkcji autokorelacji na podstawie próbek sygnału może budzić wątpliwości, nawet jeżeli weźmiemy pod uwagę, że próbek jest sześć i są one łatwe do uzyskania. Należy jednak wziąć pod uwagę, że we współczesnych systemach pomiarowych operacje przetwarzania sygnału wykonuje się prawie wyłącznie na jego cyfrowej reprezentacji. Poszukiwanie sposobów na zmniejszenie czasochłonności wykonywania takich operacji jest więc uzasadnione.

5. Literatura

- [1] Szabatin J.: Podstawy teorii sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2007.
- [2] Lal-Jadziak J.: Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych, Seria Monografie, nr 101, Wydawnictwo Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra, 2001.