

Sergiusz SIENKOWSKI, Elżbieta KAWECKA

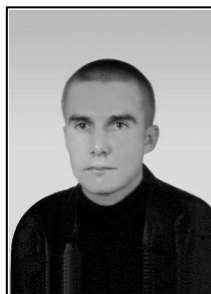
UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Metrologii Elektrycznej, ul. Podgórna 50, 65-246, Zielona Góra
UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki, ul. Podgórna 50, 65-246, Zielona Góra

Probabilistyczne własności funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego

Dr inż. Sergiusz SIENKOWSKI

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001 r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003 r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.

e-mail: S.Sienkowski@ime.uz.zgora.pl



Dr inż. Elżbieta KAWECKA

Absolwentka Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2000r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się następującymi zagadnieniami: estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, przetwarzanie A/C z sygnałem ditherowym, niepewność pomiaru, technika korelacyjna.

e-mail: E.Kawicka@iie.uz.zgora.pl



Streszczenie

Artykuł dotyczy problematyki probabilistycznych własności funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego. Funkcja autokorelacji może być rozpatrywana jako zmienna losowa o ustalonej gęstości prawdopodobieństwa. W artykule przedstawiono wyniki badań dotyczące parametrów takiej zmiennej losowej. Na podstawie funkcji gęstości prawdopodobieństwa wyznaczono wartość oczekiwaną, wartość średniokwadratową i wariancję zmiennej losowej. Uzasadnieniem dla przeprowadzonych badań jest fakt, że takie wielkości są najczęściej tylko oszacowywane oraz, że opis korelacyjny stanowi jeden z najważniejszych sposobów charakteryzowania sygnałów i ich parametrów.

Słowa kluczowe: funkcja autokorelacji, wartość oczekiwana, wariancja, rozkład arcsin

Probabilistic properties of sinusoidal signal autocorrelation function

Abstract

The paper concerns issues of probabilistic properties of the sinusoidal signal autocorrelation function. An autocorrelation function can be viewed as a random variable with fixed probability density. In the paper, results of the research on parameters of such a variable are presented. On the basis of the probability density function, the mean, the mean-square and the variance of the random variable have been determined. The justification for the conducted research is the fact that such quantities are mostly only estimated, and also that the correlation description constitutes one of the most important ways of characterizing signals and their parameters.

Keywords: autocorrelation function, mean, variance, arcsine distribution

1. Wstęp

W artykule badano probabilistyczne własności funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego. Funkcję autokorelacji można przedstawić w postaci zmiennej losowej o ustalonej gęstości prawdopodobieństwa. Na podstawie skończonego zbioru obserwacji możliwe jest tylko oszacowanie interesujących parametrów rozkładu zmiennej losowej. Dlatego w celu poznania rzeczywistych wartości parametrów rozkładu zmiennej losowej, lub krócej parametrów zmiennej losowej, takie wielkości wyznacza się w oparciu o funkcję gęstości prawdopodobieństwa. Parametry zmiennej losowej są to wielkości charakteryzujące wartości, jakie może przyjmować zmienna losowa. Autorzy wyznaczyli takie parametry jak wartość oczekiwana, wartość średniokwadratowa oraz wariancja zmiennej losowej.

2. Funkcja autokorelacji sygnału sinusoidalnego

Funkcję autokorelacji ciągłego w czasie $t \in \mathbf{R}$ ergodycznego sygnału okresowego $x(t)$ definiujemy w następujący sposób [1, 2]:

$$R_{x(t)}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} x(t)x(t+\tau) dt, \quad (1)$$

gdzie $T_s \in \mathbf{R}_+$ to okres, $\tau \in \mathbf{R}$ to opóźnienie sygnału $x(t)$.

Niech $x(t)$ będzie sygnałem sinusoidalnym opisywanym wzorem:

$$x(t) = A_0 + A \sin\left(\frac{2\pi}{T_s}t + \varphi\right), \quad (2)$$

gdzie $A \in \mathbf{R}_+$ to amplituda, $A_0 \in \mathbf{R}$ to składowa stała, $\varphi \in \mathbf{R}$ to faza początkowa sygnału $x(t)$.

Na podstawie wzorów (1) i (2) otrzymujemy [1, 2]:

$$R_{x(t)}(\tau) = A_0^2 + \frac{A^2}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_s}\tau\right). \quad (3)$$

Zwróćmy uwagę, że wielkość (3) umożliwia wyznaczenie wartości średniokwadratowej sygnału (2). Ustalając $\tau = \tau_0 = 0$ otrzymujemy $R_{x(t)}(\tau_0) = A_0^2 + A^2/2$.

3. Probabilistyczne własności funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego

Funkcja autokorelacji $R_{x(t)}(\tau)$ sygnału (2) przyjmuje wartości z przedziału $[-A^2/2 + A_0^2, A^2/2 + A_0^2]$. Jeżeli założymy, że $R_{x(t)}(\tau)$ jest zmienną losową, to $R_{x(t)}(\tau)$ ma rozkład arcsin na podanym przedziale. Funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$ ma postać:

$$f_{R_{x(t)}(\tau)}(r) = \begin{cases} \frac{1}{\pi \sqrt{\frac{A^4}{4} - (r - A_0^2)^2}}, & |r - A_0^2| < \frac{A^2}{2}, \\ 0, & |r - A_0^2| \geq \frac{A^2}{2}. \end{cases} \quad (4)$$

Dystrybucję zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$ wyznaczamy na podstawie wzoru:

$$F_{R_{x(t)}(\tau)}(r) = \int_{-\infty}^r f_{R_{x(t)}(\tau)}(u) du = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \arcsin\left(\sqrt{\frac{r - A_0^2}{A^2} + \frac{1}{2}}\right), & |r - A_0^2| \leq \frac{A^2}{2}, \\ 0, & |r - A_0^2| > \frac{A^2}{2}, \end{cases} \quad (5)$$

zaś odwrotną dystrybuantę zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$ zgodnie z zależnością:

$$F^{-1}_{R_{x(t)}(\tau)}(r) = \begin{cases} A_0^2 - \frac{A^2}{2} \cos(\pi r), & 0 \leq r \leq 1, \\ 0, & r < 0 \vee r > 1. \end{cases} \quad (6)$$

W praktyce dystrybuanta jest efektywniejszym narzędziem badania prawdopodobieństwa niż funkcja gęstości. Jest tak dlatego, ponieważ do opisu dystrybuanty stosuje się zwykle prostszy aparat matematyczny. Odwrotną dystrybuantę wyznacza się często w celu opracowania, metodą transformacji rozkładu jednostajnego, generatora liczb losowych o określonym rozkładzie prawdopodobieństwa [3].

Na podstawie wzoru (4) wyznaczyć można wartość oczekiwaną zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$:

$$\begin{aligned} E[R_{x(t)}(\tau)] &= \int_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \xi f_{R_{x(t)}(\tau)}(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \frac{\xi}{\sqrt{\frac{A^4}{4} - (\xi - A_0^2)^2}} d\xi \\ &= -j \frac{A_0^2}{\pi} \ln \left(j2(\xi - A_0^2) + 2\sqrt{\frac{A^4}{4} - (\xi - A_0^2)^2} \right) \Big|_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{A^4}{4} - (\xi - A_0^2)^2} \Big|_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \\ &= j(\ln(-jA^2) - \ln(jA^2)) \frac{A_0^2}{\pi} = A_0^2, \quad j = \sqrt{-1}. \end{aligned} \quad (7)$$

Podobnie wyznaczamy wartość średniokwadratową zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$:

$$\begin{aligned} E[(R_{x(t)}(\tau))^2] &= \int_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \xi^2 f_{R_{x(t)}(\tau)}(\xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \frac{\xi^2}{\sqrt{\frac{A^4}{4} - (\xi - A_0^2)^2}} d\xi \\ &= -j \frac{1}{\pi} \left(A_0^4 + \frac{A^4}{8} \right) \ln \left(j2(\xi - A_0^2) + 2\sqrt{\frac{A^4}{4} - (\xi - A_0^2)^2} \right) \Big|_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} (\xi + 3A_0^2) \sqrt{\frac{A^4}{4} - (\xi - A_0^2)^2} \Big|_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} = A_0^4 + \frac{1}{8} A^4. \end{aligned} \quad (8)$$

Wariancję zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$ określamy według wzoru:

$$\begin{aligned} Var[R_{x(t)}(\tau)] &= \int_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} (\xi - E[R_{x(t)}(\tau)])^2 f_{R_{x(t)}(\tau)}(\xi) d\xi \\ &= E[(R_{x(t)}(\tau))^2] - E^2[R_{x(t)}(\tau)] = \frac{1}{8} A^4. \end{aligned} \quad (9)$$

Wielkości (7) i (8) to odpowiednio momenty zwykle pierwszego i drugiego rzędu, natomiast wielkość (9) to drugi moment centralny [3].

W analogiczny sposób można wyznaczyć wzór umożliwiający obliczenie momentu zwykłego rzędu $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$. Jeżeli $A < \sqrt{2} |A_0|$, to:

$$\begin{aligned} E[(R_{x(t)}(\tau))^k] &= \int_{A_0^2 - \frac{A^2}{2}}^{A_0^2 + \frac{A^2}{2}} \xi^k f_{R_{x(t)}(\tau)}(\xi) d\xi \\ &= A_0^{2k} {}_2F_1\left(\frac{1-k}{2}, -\frac{k}{2}, 1, \frac{A^4}{4A_0^4}\right), \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie ${}_2F_1(\cdot)$ to funkcja hipergeometryczna [4]. Postać wzoru (10) została uzyskana za pomocą programu komputerowego Mathematica [5].

Ponieważ wzór (10) pozwala na obliczanie momentu rzędu k zmiennej losowej $R_{x(t)}(\tau)$ jedynie w ograniczonym zakresie, to autorzy korzystając z wyników przedstawionych w pracach [6, 7] wyprowadzili wzór:

$$\begin{aligned} E[R_{x(t)}(\tau)] &= A_0^2, \\ E[(R_{x(t)}(\tau))^2] &= A_0^4 + \frac{1}{8} A^4, \\ E[(R_{x(t)}(\tau))^3] &= A_0^6 + \frac{3}{8} A^4 A_0^2, \\ E[(R_{x(t)}(\tau))^4] &= A_0^8 + \frac{3}{4} A^4 A_0^4 + \frac{3}{128} A^8, \\ &\vdots \\ E[(R_{x(t)}(\tau))^k] &= A_0^{2k} + \sum_{i=1}^k \binom{k}{i} \left(\frac{1}{2} (i-1) (1+(-1)^i) \right) \left(\frac{1}{2} \left(\frac{i}{2} - 1 \right) (1+(-1)^i) \right) A^{2i} A_0^{2(k-i)} \frac{1+(-1)^i}{4^i}, \end{aligned} \quad (11)$$

który umożliwia wyznaczanie momentu rzędu k , bez zakładania warunków początkowych dotyczących parametrów sygnału (2).

4. Podsumowanie

W artykule przedstawiono wyniki badań dotyczące probabilistycznych własności funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego. Przeprowadzone badania obejmowały wyznaczenie parametrów zmiennej losowej, która przyjmuje wartości funkcji autokorelacji. Wyznaczono wartość oczekiwaną, wartość średniokwadratową i wariancję zmiennej losowej. W praktyce takie wielkości szacuje się na podstawie próbek sygnału lub próbek autokorelogramu. W rzeczywistych sytuacjach pomiarowych faza początkowa w każdym kolejnym okresie sygnału podlega zwykle pewnym nieznacznym fluktuacjom. Uzyskane zależności można wówczas zastosować do weryfikacji dokładności estymatorów wyznaczanych na podstawie rzeczywistych próbek sygnału lub autokorelogramu.

5. Literatura

- [1] Szabat J.: Podstawy teorii sygnałów. Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa, 2007.
- [2] Lal-Jadziak J.: Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych, Seria Monografie, nr 101, Wydawnictwo Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra, 2001.
- [3] Pacut A.: Prawdopodobieństwo. Teoria. Modelowanie probabilistyczne w technice, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa, 1985.
- [4] Olver F. W. J., Lozier D. M., Boisvert R. F. et al.: NIST Handbook of Mathematical Functions, Cambridge University Press, 2010.
- [5] Program komputerowy Mathematica: <http://www.wolfram.com/mathematica>.
- [6] Norton R. M.: On Properties of the Arc Sine Law, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A, Vol. 37, No. 2, pp. 306-308, April 1975.
- [7] Norton R. M.: Moment Properties and the Arc Sine Law, Sankhya: The Indian Journal of Statistics, Series A, Vol. 40, No. 2, pp. 192-198, April 1978.