

ODTWARZALNOŚĆ MOMENTÓW WEDŁUG TEORII KWANTOWANIA WIDROWA

Elżbieta Kawecka

**Instytut Informatyki i Elektroniki, Uniwersytet Zielonogórski
65-246 Zielona Góra, ul. Podgórna 50**

e-mail: e.kawecka@iie.uz.zgora.pl

STRESZCZENIE

Obecnie obserwuje się zainteresowanie przetwarzaniem a-c z sygnałem ditherowym. Ten rodzaj przetwarzania może prowadzić do zmniejszenia niepewności typu B powodowanej niespełnieniem przez sygnały badane warunków odtwarzalności dla kwantowania. Warto postawić sobie pytanie, jak ten rodzaj przetwarzania wpływa na objawiającą się rozrzutem wyników pomiarów niepewność typu A.

1. WPROWADZENIE

Podstawowe obszary zastosowań metod korelacyjnych to pomiary czasu opóźnienia, wyznaczanie toru sygnału oraz wykrywanie sygnałów w szumie i ich odtwarzanie [4].

Mimo, że analiza korelacyjna ma już półwieczną historię, ujawniają się wciąż nowe problemy dotyczące oceny jej dokładności. Jest to związane m.in. z rozwojem wiedzy o przetwarzaniu sygnałów oraz zmianami w technologii przyrządów pomiarowych [5]. Ze względu na wielorakość zastosowań techniki korelacyjnej wiedza metrologiczna z tego zakresu jest rozproszona i często bywa przedstawiana w sposób uproszczony, a dostępne podręczniki zawierają rutynowe analizy. W uważanych za znaczące w tej dziedzinie monografiach nie analizuje się wpływu kwantowania oraz kwantowania z sygnałem ditherowym na jakość estymacji funkcji korelacyjnych. Brakuje oceny sygnału wyjściowego oferowanych na rynku analizatorów umożliwiających wyznaczanie funkcji korelacyjnych. Producenci podają informacje dotyczące sposobu przetwarzania sygnałów wejściowych unikając informacji na temat oceny dokładności sygnału wyjściowego.

W ostatnich latach nastąpiły zmiany w technologii przyrządów pomiarowych polegające na zastępowaniu sprzętu przez szybkie moduły oprogramowania (przetworniki emulowane). Nowe podejście do konstruowania przyrządów (przyrządy wirtualne) umożliwia sięgnięcie do rzadziej stosowanych estymatorów funkcji korelacyjnych. W tej sytuacji metoda bezpośrednia wyznaczania funkcji korelacyjnych jako prostsza do programowania i bardziej logiczna z punktu widzenia definicji może z powodzeniem konkurować z metodą pośrednią.

Występujący na wejściu wirtualnych przyrządów pomiarowych przetwornik analogowo-cyfrowy jest podzespołem decydującym o dokładności, szybkości i koszcie każdego procesu pomiarowego. Ponieważ obiecujący kierunek udoskonalania systemów pomiarowych stanowi konwersja a-c z sygnałem ditherowym, warto rozważyć jej przydatność w zastosowaniu do estymacji funkcji korelacyjnych. Z powodu złożoności problemu i trudności z uogólnieniem wniosków zagadnienie to jest pomijane w liczących się w dziedzinie miernictwa stochastycznego i techniki korelacyjnej podręcznikach.

Dotychczas nie są publikowane analizy wpływu sygnałów ditherowych na niepewność typu A estymatorów funkcji korelacyjnych. Została przeprowadzona analiza obciążenia cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych, które charakteryzuje się niepewnością typu B [1]. Publikacje te stanowią inspirację autora do dalszych badań.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA Z DZIEDZINY METOD KORELACYJNYCH

Miarą podobieństwa fragmentów jednego sygnału lub fragmentów dwóch różnych sygnałów są funkcje korelacji. Rozróżnia się funkcję autokorelacji (moment łączny zmiennej losowej), będącej miarą podobieństwa fragmentów tego samego sygnału i funkcję korelacji wzajemnej (interkorelacji), będącej miarą podobieństwa fragmentów różnych sygnałów [4]. W technice najczęściej stosowane są dwie definicje funkcji korelacyjnych dane wzorami [1]:

$$R_x(\tau) = E[x(t_1)x(t_1 + \tau)] \quad (1)$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t_1)y(t_1 + \tau)] \quad (2)$$

Funkcję autokorelacji ergodycznego i stacjonarnego procesu $\{x(t)\}$ można wyznaczyć na podstawie jednej dowolnie wybranej realizacji $x(t)$ procesu zgodnie z zależnością [1]:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (3)$$

Analogicznie wyznacza się funkcję korelacji wzajemnej ergodycznych i stacjonarnych procesów $\{x(t)\}$ oraz $\{y(t)\}$:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \quad (4)$$

W praktyce pomiarowej posługujemy się estymatorami funkcji korelacyjnych. Są to obecnie głównie estymatory cyfrowe [1]:

$$\tilde{R}_{xy}^q(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{q1}(i\Delta\Delta) y_{q2}(i\Delta\Delta + k\Delta\Delta) \quad (5)$$

$$\tilde{R}_{xy}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q1}(i\Delta t) y_{1q2}(i\Delta t + k\Delta t) \quad (6)$$

gdzie: Δt – krok próbkowania, M – liczba pobranych próbek, $k\Delta t$ – opóźnienie. Estymator (5) jest estymatorem cyfrowym, w którym każdy z sygnałów poddany jest zarówno dyskretyzacji w dziedzinie czasu, czyli próbkowaniu ze stałym krokiem, jak i w dziedzinie wartości, czyli kwantowaniu w kwantyzatorach typu roundoff. Estymator (6) został uzyskany w wyniku przetwarzania a-c z sygnałem ditherowym.

Pod pojęciem sygnału ditherowego rozumie się sygnał pomocniczy dodawany do sygnału przetwarzanego przed jego skwantowaniem. Jeżeli wartości wielkości wyznaczone są wiele razy w celu uśredniania, to dodanie dithera może efektywnie poprawić dokładność tych średnich [3]. Sygnałem ditherowym jest sygnał stacjonarny, niezależny od sygnału przetwarzanego i mający zerową wartość średnią.

Podczas estymacji funkcji korelacji wzajemnej sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są przetwarzane do postaci cyfrowych $x_{q1}(i)$ i $y_{q1}(i)$, następnie są opóźniane względem siebie o k próbek, mnożone i uśredniane. Natomiast podczas estymacji funkcji korelacji wzajemnej z sygnałem ditherowym do badanych sygnałów dodawane są dwa dodatkowe sygnały zwane ditherowymi. W teorii estymacji dokładność estymatora oceniana jest za pomocą [5]: obciążenia (7) opisującego systematyczną składową błędu oraz wariancji estymatora (8) opisującej losową składową błędu:

$$b[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] - R_{xy}(k) \quad (7)$$

$$\text{Var}[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] = E[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)]^2 - E^2[\tilde{R}_{xy}^q(k, M)] \quad (8)$$

Jeżeli obciążenie jest znane, to można je usunąć za pomocą poprawki do wyniku, w innym przypadku podawane jest w postaci niepewności typu B.

Niepewność pomiaru jest parametrem pozwalającym na wyznaczenie granic przedziału zawierającego z założonym prawdopodobieństwem nieznaną wartość rzeczywistą (prawdziwą) mierzonej wielkości. W zależności od metod używanych do oszacowania niepewność dzieli się na: typ A (wyznaczana metodami statystycznymi) oraz typ B (wyznaczana innymi metodami).

Dalsze rozważania wymagają znajomości teorii oraz twierdzeń o kwantowaniu sformułowanych przez Widrowa.

3. TEORIA KWANTOWANIA WIDROWA

Widrow jest twórcą koncepcji, by analizę dotyczącą kwantowania przenieść z dziedziny wartości sygnałów do dziedziny rozkładów wartości, czyli statystyk sygnałów. Wykazał on,

że operację kwantowania można zrealizować poprzez próbkowanie funkcji gęstości prawdopodobieństwa przetwarzanego sygnału [1]. Odpowiednikiem przedziałów czasowych są tu przedziały wartości amplitud. Zaletą takiego rozwiązania jest to, że próbkowanie staje się operacją liniową.

Fundamentalnym zagadnieniem w przypadku próbkowania w dziedzinie czasu jest odtwarzalność przebiegu na podstawie jego próbek. W przypadku kwantowania, czyli próbkowania w dziedzinie rozkładów wartości sygnałów, warunek odtwarzalności dotyczy warunków, przy których można ze statystyk wielkości skwantowanych odtworzyć statystyki wielkości nieskwantowanych.

Przedstawienie teorii Widrowa wymaga wprowadzenia pojęcia funkcji charakterystycznej. Funkcja charakterystyczna $\Phi_x(v)$ jest przekształceniem Fouriera funkcji gęstości prawdopodobieństwa $p(x)$ do dziedziny v ze zmianą znaku. Dla sygnału x poddanego kwantowaniu jest ona równa [1]:

$$\Phi_x(v) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x) e^{jvx} dx = E[e^{jvx}] \quad (9)$$

Łączna funkcja charakterystyczna sygnałów x oraz y ma postać:

$$\Phi_{xy}(v_1, v_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) e^{j(v_1x + v_2y)} dx dy = E[e^{j(v_1x + v_2y)}] \quad (10)$$

Moment rzędu m sygnału x oraz moment łączny rzędu $m+n$ sygnałów x i y mogą być wyznaczone przez różniczkowanie funkcji charakterystycznej jako [1, 6]:

$$E[x^m] = j^{-m} \frac{d^m \Phi_x(v)}{dv^m} \Big|_{v=0} \quad (11)$$

$$E[x^m y^n] = j^{-(m+n)} \frac{\partial^{m+n} \Phi_{xy}(v_1, v_2)}{\partial^{m} v_1 \partial^{n} v_2} \Big|_{(v_1, v_2)=(0,0)} \quad (12)$$

gdzie $j = \sqrt{-1}$.

Twierdzeniami teorii kwantowania Widrowa dotyczącymi odtwarzalności momentów są dwa twierdzenia [1]:

Twierdzenie 1

Jeżeli funkcja charakterystyczna ma ograniczoną dziedzinę, czyli gdy:

$$\Phi_x(v) = 0 \quad \text{dla} \quad |v| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon \quad (13)$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty (np. wartość średnia, wartość średniokwadratowa) sygnału x mogą być wyznaczone z momentów skwantowanego sygnału x_q .

Twierdzenie 2

Jeżeli funkcja charakterystyczna sygnałów $x_1, \dots, x_N$ poddanych kwantowaniu ma ograniczoną dziedzinę w N - wymiarach, czyli gdy:

$$\Phi_{x_1, \dots, x_N}(v_1, \dots, v_N) = 0 \quad \text{dla } |v_k| > \frac{2\pi}{q} - \varepsilon \quad \text{dla } k \in \{1, 2, \dots, N\} \quad (14)$$

gdzie ε jest dowolnie małą liczbą dodatnią, to wszystkie istniejące momenty sygnałów $x_1, \dots, x_N$ mogą być wyznaczone z momentów skwantowanych sygnałów $x_{q1}, \dots, x_{qN}$.

Warunki te są spełnione, gdy funkcje charakterystyczne sygnałów poddanych kwantowaniu mają ograniczoną dziedzinę lub, gdy kwantowanie zachodzi z nieskończenie dużą rozdzielczością. Założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej jest warunkiem dostatecznym odtwarzalności kwantowania [1].

Zgodnie z założeniem teorii kwantowania Widrowa krok kwantowania q należy dobrać tak, aby funkcja dla argumentów $|v| > \frac{2\pi}{q}$ przyjmowała wartość $= 0$.

Jeżeli sygnały x i y spełniają założenia teorii Widrowa to słuszne są następujące zależności [1]:

$$E[x_q] = E[x] \quad (15)$$

$$E[x_q^2] = E[x^2] + \frac{q^2}{12} \quad (16)$$

$$E[x_q^4] = E[x^4] + \frac{q^2}{2} E[x^2] + \frac{7}{240} q^4 \quad (17)$$

$$E[x_q y_q] = E[x y] \quad (x \neq y) \quad (18)$$

Jednak założenie o ograniczonej dziedzinie funkcji charakterystycznej nie jest spełniane przez sygnały rzeczywiste, ponieważ zbiór wartości sygnału poddanego kwantowaniu jest nieograniczony. Dlatego wyznaczaniu momentów towarzyszą dodatkowe składowe opisane w [2, 6].

4. ZAKOŃCZENIE

Z dotychczas przeprowadzonych przez autora badań dotyczących warunków odtwarzalności dla wartości średniokwadratowej [6], będącej wartością funkcji autokorelacji dla argumentu

zerowego, oraz trwających badań nad błędami kwantowania towarzyszącymi wyznaczaniu momentu rzędu drugiego (wartości średniokwadratowej) i momentu łącznego (funkcji korelacji wzajemnej) sygnałów o rozkładzie normalnym można przedstawić następujące wnioski:

- Nie istnieją sygnały spełniające dokładnie warunki teorii kwantowania Widrowa.
- Sygnał ditherowy o rozkładzie normalnym, mimo że nie spełnia warunku zerowania się funkcji charakterystycznej wg Widrowa, może wpływać na zmniejszenie błędu obciążenia wynikającego z niespełnienia przez funkcję charakterystyczną sygnału warunku ograniczonej dziedziny i jest on stosunkowo łatwy do wygenerowania w porównaniu z innymi sygnałami ditherowymi.
- Zarówno obciążenie estymatora momentu rzędu drugiego (wartości średniokwadratowej sygnału) jak i momentu łącznego (funkcji korelacji wzajemnej) sygnałów o rozkładach normalnych osiąga znaczące poziomy dopiero dla stosunkowo dużych wartości kroku kwantowania ($q > \sigma$).
- Podczas wykonywania eksperymentu (pomiaru wartości średniokwadratowej) problem stanowił dość długi czas pomiaru [6]. Niewielka poprawa dokładności pociągała za sobą znaczny wzrost czasu. Uzyskano wyniki zbliżone z oczekiwanymi tzn., że względne obciążenie estymatora maleje wraz ze wzrostem wartości skutecznej sygnału ditherowego, a wartość niepewności standardowej względnej wzrasta wraz ze wzrostem wartości skutecznej sygnału ditherowego.

LITERATURA

- [1] J. Lal-Jadziak: *Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych*, Seria Monografie, nr 101, Wyd. Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra 2001
- [2] J. Lal-Jadziak: *Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej*, Pomiary Automatyka Kontrola nr 7,8 2002.
- [3] A. Domańska: *Oddziaływanie na wiarygodność w systemach pomiarowych poprzez zastosowanie konwersji a-c z sygnałem ditherowym*, Seria Rozprawy, nr 308, Wyd. Politechniki Poznańskiej, Poznań 1995.
- [4] J.S. Bendat, A.G. Piersol: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, PWN, Warszawa 1976.
- [5] L. Spiralski, J. Lal-Jadziak: *Problemy pomiarów korelacyjnych*, Elektronika, z. 6, 2002.
- [6] E. Kawecka: *Kształtowanie niepewności cyfrowych pomiarów korelacyjnych*, V Ogólnopolskie warsztaty doktoranckie – OWD 2003, Istabna – Zaolzie, 2003