

MODEL WIRTUALNEGO KORELATORA

Elżbieta Kawecka

**Instytut Informatyki i Elektroniki, Uniwersytet Zielonogórski
65-246 Zielona Góra, ul. Podgórna 50**

e-mail: e.kawecka@iie.uz.zgora.pl

STRESZCZENIE

Przedmiotem badań autorki jest niepewność typu A i B towarzysząca cyfrowym pomiarom korelacyjnym. Ponieważ modele błędów estymacji funkcji korelacyjnych są skomplikowane i na ich podstawie trudno szacować dokładność w wielu sytuacjach pomiarowych, w celu przeprowadzenia badań eksperymentalnych został opracowany wirtualny model korelatora. Ponadto w artykule omówiono właściwości funkcji korelacyjnych oraz ich estymatory cyfrowe oraz przedstawiono wstępne wyniki badań w celu sprawdzenia poprawności działania aplikacji.

1. WPROWADZENIE

Korelacyjne metody pomiarowe zostały upowszechnione w latach siedemdziesiątych dzięki burzliwemu rozwojowi teorii sygnałów i zmianami technologii w elektronice. Pojawienie się na rynku uniwersalnych analizatorów umożliwiło określanie funkcji korelacyjnych. Obecnie korelatory, charakteryzujące się dużą szybkością działania, umożliwiają pomiar funkcji korelacyjnych w czasie rzeczywistym. Dwa podstawowe obszary zastosowań metod korelacyjnych to pomiary prędkości i opóźnień oraz analiza sygnałów przy występowaniu zakłóceń [3]. Mimo, że analiza korelacyjna ma już półwieczną historię, ujawniają się wciąż nowe problemy dotyczące oceny jej dokładności. Jest to związane m.in. z rozwojem wiedzy o przetwarzaniu sygnałów oraz zmianami w technologii przyrządów pomiarowych [1, 4].

Obiecujący kierunek udoskonalania systemów pomiarowych stanowi konwersja a-c z sygnałem ditherowym. Dlatego też warto rozważyć przydatność tej konwersji w zastosowaniu do estymacji funkcji korelacyjnych. Ponieważ modele błędów estymacji funkcji korelacyjnych są skomplikowane i na ich podstawie trudno szacować dokładność w wielu sytuacjach pomiarowych, w celu przeprowadzenia badań eksperymentalnych został opracowany wirtualny model korelatora.

2. PODSTAWOWE POJĘCIA Z DZIEDZINY METOD KORELACYJNYCH

Miarą podobieństwa fragmentów jednego sygnału lub fragmentów dwóch różnych sygnałów są funkcje korelacji. Rozróżnia się funkcję *autokorelacji* (moment łączny zmiennej losowej),

będącej miarą podobieństwa fragmentów tego samego sygnału i funkcję *korelacji wzajemnej* (interkorelacji), będącej miarą podobieństwa fragmentów różnych sygnałów [2, 3].

W technice najczęściej stosowane są dwie definicje funkcji korelacyjnych dane wzorami [1]:

$$R_x(\tau) = E[x(t_1)x(t_1 + \tau)] \quad (1)$$

$$R_{xy}(\tau) = E[x(t_1)y(t_1 + \tau)] \quad (2)$$

Funkcję autokorelacji ergodycznego i stacjonarnego procesu $\{x(t)\}$ można wyznaczyć na podstawie jednej dowolnie wybranej realizacji $x(t)$ procesu zgodnie z zależnością [1]:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t + \tau) dt \quad (3)$$

Funkcja $R_x(\tau)$ sygnału rzeczywistego jest rzeczywista i parzysta oraz osiąga maksimum dla argumentu $\tau=0$.

Wartość średnia $x(t)$ sygnału $x(t)$ może być - za wyjątkiem sygnałów okresowych - wyrażona zależnością:

$$\overline{x(t)} = \sqrt{R_x(\infty)} \quad (4)$$

Wartość średniokwadratowa sygnału $x(t)$ jest równa:

$$\overline{x^2(t)} = R_x(0) \quad (5)$$

Analogicznie wyznaczają się funkcję korelacji wzajemnej ergodycznych i stacjonarnych procesów $\{x(t)\}$ oraz $\{y(t)\}$:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t + \tau) dt \quad (6)$$

w której: $x(t)$ i $y(t)$ są realizacjami procesów $\{x(t)\}$ i $\{y(t)\}$,

τ – opóźnieniem,

T – czasem obserwacji.

Dla uproszczenia, lecz bez wpływu na ogólność rozważań, założono, że $x(t)$ i $y(t)$ mają zerowe wartości średnie.

Podobnie jak funkcja autokorelacji $R_x(\tau)$ przyjmuje ona wartości rzeczywiste zarówno dodatnie jak i ujemne. Charakteryzuje się cechą antysymetrii oraz podlega ograniczeniom:

$$|R_{xy}(\tau)|^2 \leq R_x(0)R_y(0) \quad (7)$$

$$\text{oraz} \quad |R_{xy}(\tau)| \leq \frac{1}{2} [R_x(0) + R_y(0)] \quad (8)$$

Jeżeli sygnał $x(t)$ lub $y(t)$ ma zerową wartość średnią oraz $R_{xy}(\tau) = 0$, to sygnały $x(t)$ i $y(t)$ nazywa się nieskorelowanymi dla opóźnienia $\tau = \tau_i$. Jeśli zaś sygnały $x(t)$ i $y(t)$ są statystycznie niezależne, to dla każdej wartości τ funkcja $R_{xy}(\tau)$ przyjmuje wartość równą zero, pod warunkiem, że $x(t)$ lub $y(t)$ ma wartość średnią równą zero.

Funkcja autokorelacji $R_x(\tau)$ jest parzystą funkcją argumentu τ , czyli:

$$R_x(-\tau) = R_x(\tau) \quad (9)$$

podczas, gdy funkcja korelacji wzajemnej $R_{xy}(\tau)$ spełnia zależność:

$$R_{xy}(-\tau) = R_{yx}(\tau) \quad (10)$$

Najważniejsze właściwości funkcji autokorelacji i korelacji wzajemnej są następujące [5]:

- funkcja autokorelacji jest parzystą funkcją opóźnienia,
- funkcja autokorelacji w punkcie $\tau = 0$ jest równa wartości średniokwadratowej sygnału ψ_x^2 (wartość średniokwadratowa sygnału zawierającego składową stałą i składową zmienną) i musi być dodatnia,
- funkcja autokorelacji osiąga maksimum w punkcie $\tau = 0$, czyli $R_x(0) \geq R_x(\tau)$,
- sygnał okresowy $x(t)$ ma okresową funkcję autokorelacji,
- funkcja autokorelacji sygnału losowego zanika dla $\tau \rightarrow \infty$,
- funkcja korelacji wzajemnej nie musi być symetryczna w dziedzinie τ ,
- kolejność indeksów przy oznaczaniu funkcji jest istotna: $R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau)$,
- funkcja autokorelacji sumy dwóch nieskorelowanych sygnałów jest równa sumie autokorelacji tych dwóch sygnałów, jeżeli $z(t) = x(t) + y(t)$ oraz $R_{xy}(\tau) = 0$ dla wszystkich τ , to: $R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau)$.

Ponieważ w praktyce pomiarowej nie jest możliwe wyznaczenie funkcji korelacyjnych, wyznacza się ich estymatory. Są to obecnie głównie estymatory cyfrowe [1]:

$$\tilde{R}_{xy}^q(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{q1}(i\Delta t) y_{q2}(i\Delta t + k\Delta t) \quad (11)$$

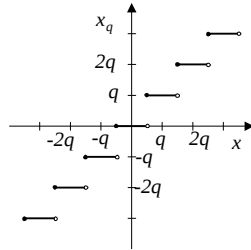
$$\tilde{R}_{xy}^d(k, M) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q1}(i\Delta t) y_{1q2}(i\Delta t + k\Delta t) \quad (12)$$

gdzie: Δt – krok próbkowania;

M – liczba pobranych próbek;

$k\Delta t$ – opóźnienie.

Estymator (11) jest estymatorem cyfrowym, w którym każdy z sygnałów poddany jest zarówno dyskretyzacji w dziedzinie czasu, czyli próbkowaniu ze stałym krokiem, jak i w dziedzinie wartości, czyli kwantowaniu w kwantyzatorach typu *roundoff* (rys. 1). Estymator (12) został uzyskany w wyniku przetwarzania a-c z sygnałem ditherowym.



Rys.1. Fragment typowej charakterystyki operacji kwantowania równomiernego

Dither jest nieperiodycznym sygnałem o charakterze szumu, który dodaje się do sygnału analogowego przed przetwarzaniem analogowo-cyfrowym, aby zmniejszyć granulacyjny szum kwantowania. Pozytywny wpływ sygnału ditherowego na wynik pomiarów zauważalny jest przy zastosowaniu przetworników A/C o niskiej rozdzielczości, np. 2, 3 lub 4 bitowych [6].

Przy analizowaniu jakości estymatorów brane są pod uwagę następujące właściwości [1]:

- estymator powinien być nieobciążony, co oznacza, że wartość oczekiwana estymatora $\tilde{\Psi}$ parametru Ψ powinna być równa wartości tego parametru:

$$E[\tilde{\Psi}] = \Psi \quad (13)$$

- estymator powinien być zgodny, tj. zbieżny według prawdopodobieństwa do wartości oczekiwanej Ψ przy liczbie prób zmierzającej do nieskończoności:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P[|\tilde{\Psi}(N) - \Psi| \geq \nu] = 0 \quad (14)$$

gdzie ν - dowolnie mała liczba dodatnia,

- estymator powinien być efektywny czyli nieobciążony o najmniejszej wariancji.

Oceny dokładności estymatorów dokonuje się za pomocą [4]:

- błędu średniokwadratowego:

$$e^2 = E[(\tilde{\Psi} - \Psi)^2] \quad (15)$$

- wariancji estymatora, czyli opisu losowej składowej błędu:

$$D^2[\tilde{\Psi}] = E[(\tilde{\Psi} - E\tilde{\Psi})^2] \quad (16)$$

- obciążenia, czyli opisu systematycznej składowej błędu:

$$b[\tilde{\Psi}] = E\tilde{\Psi} - \Psi \quad (17)$$

W praktyce minimalizacja błędu średniokwadratowego odbywa się przy pomocy kompromisu między minimalizacją obciążenia i wariancji.

Przy szacowaniu błędów estymacji stosuje się często normowanie względem wielkości estymowanej. Niekiedy bowiem ze wzrostem argumentu, którego funkcją jest wielkość estymowana, wariancja czy obciążenie estymatora maleje, ale wolniej niż szacowana wielkość, co może powodować zbyt optymistyczne wnioskowanie o błędach estymacji.

3. MODEL WIRTUALNEGO KORELATORA

Do realizacji modelu wirtualnego korelatora wykorzystano środowisko LabWindows/CVI firmy National Instruments w wersji 5.0.

LabWindows/CVI posiada ciągle powiększającą się, rozbudowaną listę funkcji umożliwiających przetwarzanie danych, a także graficzny interfejs użytkownika, którego właściwości pozwalają odtworzyć główny panel przyrządu w aplikacji tworząc tzw. przyrząd wirtualny. Typowy projekt, zrealizowany w tym środowisku może zawierać pliki źródłowe w C, moduły DLL, moduły wynikowe OBJ oraz programy obsługi urządzeń i pliki interfejsu użytkownika [7]. Dodatkowo program LabWindows/CVI posiada narzędzia automatyzujące proces tworzenia aplikacji.

Wykonany program umożliwia:

- zamodelowanie sygnału badanego (sinusoidalnego, piłokształtnego lub trójkątnego, o podanej przez użytkownika częstotliwości, amplitudzie, częstotliwości próbkowania, oraz wartości przesunięcia fazowego (0° , 90° , 180°))
- dokonanie doboru nastaw związanych z konwersją A/C,
- wybór rodzaju i poziomu sygnału ditherowego dodawanego do sygnału badanego (szumu o rozkładzie równomiernym o podanej przez użytkownika amplitudzie oraz szumu Gaussa o podanej wartości odchylenia standardowego),
- zobrazowanie drogi (oraz przekształceń) sygnału badanego w torach korelatora,
- przeprowadzenie eksperymentu (ocena błędów estymacji funkcji korelacji) i ekspozycję wyników doświadczenia,
- ekspozycję sygnałów badanych i przetworzonych w dziedzinie czasu i częstotliwości.

W ramach eksperymentu zostały obliczone następujące błędy estymatorów funkcji korelacyjnych:

- estymatora obciążenia (błędu systematycznego):

$$b = \bar{\tilde{R}} - R_{zadane} \quad (18)$$

gdzie: $\bar{\tilde{R}} = \frac{1}{M} \sum_{i=1}^M \tilde{R}_i$

R_{zadane} – przewidywana wartość funkcji korelacyjnej

- estymatora wariancji (błędu przypadkowego):

$$D^2 = \frac{\sum_{i=1}^M (\tilde{R}_i - \bar{\tilde{R}})^2}{M - 1} \quad (19)$$

Obliczeń dokonano dla następujących parametrów symulacji:

- liczby powtórzeń (wskazującej ile razy będzie generowana funkcja korelacji),
- numeru próbki,
- $R_{zadanego}$ (spodziewanej wartości funkcji korelacyjnej).

Program umożliwia także wybór typu korelacji:

- korelacji wzajemnej,
- autokorelacji toru pierwszego,
- autokorelacji toru drugiego.

4. BADANIA POPRAWNOŚCI DZIAŁANIA APLIKACJI

W celu sprawdzenia poprawności działania aplikacji zbadano wpływ rozdzielczości przetwornika analogowo-cyfrowego na błąd systematyczny (estymator obciążenia funkcji korelacyjnej).

Zostały ustawione następujące parametry sygnałów:

Tab. 1. Parametry sygnału, przetwornika A/C oraz dithera.

Typ sygnału	sinusoidalny
Amplituda sygnału	2 V
Częstotliwość sygnału	1.2 kHz
Liczba próbek	256
Typ przetwornika A/C	bipolarny
Zakres przetwarzania	± 2.5 V
Rodzaj dithera	gaussowski / o rozkładzie równomiernym
Amplituda / odchylenie	0.1 V / 0.1 V

standardowe	
-------------	--

Eksperyment polegał na badaniu zmiany błędu systematycznego w funkcji rozdzielczości przetwornika. Rozdzielczość przetwornika zmieniana była w zakresie od 3 do 16 bitów (3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 16). Zakres przetwarzania był stały i wynosił ± 2.5 V.

Badanie wykonano, korzystając z funkcji korelacji wzajemnej, dla następujących parametrów:

- liczby powtórzeń = 100,
- numeru próbek = 0,
- $R_{zadane} = 2.0 V^2$.

R_{zadane} zostało oszacowane według następującego wzoru:

$$R_{zadane} = \frac{A^2}{2} = \frac{4V^2}{2} = 2V^2 \quad (20)$$

Wyniki obliczeń w postaci tabelarycznej dla poszczególnych rozdzielczości przetwornika A/C przedstawia poniższa tabela:

Tab. 2. Wyniki przeprowadzonego eksperymentu: wpływ rozdzielczości przetwornika A/C na błąd systematyczny

Rozdzielczość przetwornika [b i t y]	b [V ²] dla dithera o rozkładzie równomiernym	b [V ²] dla dithera gaussowskiego
3	-0,62*10 ⁰	-0,65*10 ⁰
4	-0,35*10 ⁰	-0,36*10 ⁰
5	-0,19*10 ⁰	-0,23*10 ⁰
6	-0,11*10 ⁻¹	-0,11*10 ⁰
8	-0,32*10 ⁻¹	-0,25*10 ⁻¹
10	-0,70*10 ⁻²	-0,26*10 ⁻²
12	-0,20*10 ⁻²	-0,23*10 ⁻²
16	-0,10*10 ⁻²	0,40*10 ⁻³

Na podstawie wyników można stwierdzić, że wraz ze wzrostem rozdzielczości przetwornika maleje błąd systematyczny funkcji korelacyjnej. Poziom błąd jest podobny dla obu rodzajów dithera.

5. PODSUMOWANIE

Pomiary korelacyjne są dynamicznie rozwijającą się dziedziną metrologii. Mimo, że analiza korelacyjna ma już półwieczną historię, ujawniają się wciąż nowe problemy dotyczące oceny jej dokładności. Ponieważ modele błędów estymacji funkcji korelacyjnych są skomplikowane i na ich podstawie trudno szacować dokładność w wielu sytuacjach pomiarowych, został opracowany wirtualny model korelatora w celu przeprowadzenia badań eksperymentalnych. Ze względu na bogate biblioteki zawierające procedury przetwarzania sygnałów, rozbudowany aparat matematyczny oraz przyjazny interfejs użytkownika pozwalający na intuicyjne posługiwanie się oprogramowaniem, do realizacji aplikacji wybrano pakiet programistyczny LabWindows/CVI 5.0 firmy National Instruments. W programie została zastosowana oryginalna procedura określania funkcji korelacyjnych, ponieważ dostępne funkcje pakietu LabWindows prowadziły do niewiarygodnych wyników. Podstawowym problemem podczas wykonywania eksperymentu jest czasochłonność i złożoność procedur symulacyjnych. Zalecane jest, aby program był uruchamiany i użytkowany na komputerach wykorzystujących procesory klasy Pentium®.

LITERATURA

- [1] J. Lal-Jadziak: *Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych*, Seria Monografie, nr 101, Wyd. Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra, 2001
- [2] J. Lal-Jadziak: *Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej*, *Pomiary Automatyka Kontrola* nr 7,8 2002
- [3] J. S. Bendat, A. G. Piersol: *Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych*, PWN, Warszawa, 1976.
- [4] L. Spiralski, J. Lal-Jadziak: *Problemy pomiarów korelacyjnych*, *Elektronika*, z. 6, 2002
- [5] B. M. Oliver, J. M. Cage: *Pomiary i przyrządy elektroniczne*, WKŁ, Warszawa, 1978
- [6] P. H. Sydenham: *Podręcznik metrologii*, WKŁ, Warszawa, 1988
- [7] LabWindows/CVI Internet Developers Toolkit Online Help