

Elżbieta KAWECKA

UNIwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki

Zastosowanie modelu wirtualnego korelatora do oceny niepewności cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych

Mgr inż. Elżbieta KAWECKA

Mgr inż. Elżbieta Kawecka od 2000 roku pracuje w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego na stanowisku asystenta. W 2003 roku otworzyła przewód doktorski w dyscyplinie elektrotechnika. Tematem jej rozprawy doktorskiej jest Kształtowanie niepewności cyfrowych pomiarów korelacyjnych.



e-mail: e.kawecka@iie.uz.zgora.pl

Streszczenie

Przedmiotem badań autorki jest wpływ gaussowskiego dithera na niepewność typu A i B towarzyszącą cyfrowym pomiarom korelacyjnym. Analityczne modele błędów estymacji funkcji korelacyjnych są skomplikowane i na ich podstawie trudno szacować dokładność w wielu sytuacjach pomiarowych. Opracowanie przez autorkę odpowiedniego narzędzia informatycznego (modelu wirtualnego korelatora) umożliwiło przeprowadzenie badań eksperymentalnych. W artykule zaprezentowano model wirtualnego korelatora oraz, w celu sprawdzenia poprawności działania aplikacji, przedstawiono część przeprowadzonych badań.

Słowa kluczowe: pomiary korelacyjne, cyfrowe estymatory funkcji korelacyjnych, niepewność typu A i B, przetwarzanie A/C z ditherem.

The use of virtual correlator model for the evaluation of the uncertainty of digital correlation estimators

Abstract

The subject of the research is influence of Gaussian dither on A- and B-type uncertainty in digital correlation measurements. Analytical models of estimation errors of correlation functions are highly complex, therefore evaluation of accuracy is very difficult and in many cases is unachievable. For that reason author proposed a virtual correlator model as an alternative to analytical modeling. The model proposed allows to determine components of digital measurements uncertainty. In this article some preliminary research results are presented and discussed. A comparison of bias of the mean square value estimator modeled in Mathcad and obtained by means of virtual correlator model is carried out.

Keywords: correlation measurements, digital estimators of correlation functions, uncertainty of measurement, A/C conversion with dither.

1. Wstęp

Podstawowymi obszarami zastosowań metod korelacyjnych są pomiary prędkości i opóźnień oraz analiza sygnałów przy występowaniu zakłóceń. Mimo, że analiza korelacyjna ma już półwieczną historię, ujawniają się wciąż nowe problemy dotyczące oceny jej dokładności. Jest to związane m.in. z rozwojem wiedzy o przetwarzaniu sygnałów oraz zmianami w technologii przyrządów pomiarowych. Ze względu na to, że techniki korelacyjne stosowane są w różnych dziedzinach nauki, wiedza z tego zakresu jest rozproszona i często bywa przedstawiana w sposób uproszczony. Dodatkowo, w kolejnych wydaniach podręczników, pomijane jest zagadnienie analizy wpływu kwantowania oraz kwantowania z sygnałem *ditherowym* na jakość estymacji funkcji korelacyjnych.

2. Podstawowe pojęcia z dziedziny metod korelacyjnych, błędów oraz niepewności

Konwersja A/C z sygnałem *ditherowym* stanowi obecnie obiecujący kierunek udoskonalania systemów pomiarowych. Dlatego

też warto rozważyć przydatność tej konwersji w zastosowaniu do estymacji funkcji korelacyjnych.

Pod pojęciem sygnału *ditherowego* rozumie się sygnał pomocniczy dodawany do sygnału przetwarzanego przed jego skwantowaniem [1]. Jeżeli wartości wielkości wyznaczane są wiele razy w celu uśrednienia, to dodanie *dithera* może efektywnie poprawić dokładność tych średnich. Zastosowanie *dithera* powoduje wzrost rozdzielczości kwantyzatora poprzez zmniejszenie zniekształceń nieliniowych wynikających z kwantowania, a także może prowadzić do zmniejszenia nieliniowości różniczkowej przetwornika [1]. Sygnałem *ditherowym* jest najczęściej losowy sygnał stacjonarny, niezależny od sygnału przetwarzanego i mający zerową wartość średnią.

Funkcje korelacyjne są miarą podobieństwa fragmentów jednego sygnału lub fragmentów dwóch różnych sygnałów. Rozróżnia się funkcję *autokorelacji*, będącą miarą podobieństwa fragmentów tego samego sygnału i funkcję *korelacji wzajemnej* (*interkorelacji*), będącą miarą podobieństwa fragmentów różnych sygnałów [2, 3]. Funkcja autokorelacji ergodycznego procesu $\{x(t)\}$ może być wyrażona zależnością [1]:

$$R_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt \quad (1)$$

Funkcja autokorelacji dla argumentu zerowego jest równa wartości średniokwadratowej sygnału $x(t)$:

$$R_x(0) = \overline{x^2(t)} \quad (2)$$

Analogicznie wyznacza się funkcję korelacji wzajemnej ergodycznych i stacjonarnych procesów $\{x(t)\}$ oraz $\{y(t)\}$:

$$R_{xy}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) y(t + \tau) dt \quad (3)$$

gdzie: $x(t)$ i $y(t)$ – realizacje procesów $\{x(t)\}$ i $\{y(t)\}$, τ – opóźnienie, T – czas obserwacji.

Dla uproszczenia, lecz bez wpływu na ogólność rozważań, założono, że $x(t)$ i $y(t)$ mają zerowe wartości średnie. Podobnie jak funkcja autokorelacji przyjmuje ona wartości rzeczywiste zarówno dodatnie jak i ujemne.

Ponieważ w praktyce pomiarowej nie jest możliwe wyznaczenie funkcji korelacyjnych, określa się na ogół ich cyfrowe estymatory. W tym celu każdy z sygnałów poddany jest zarówno dyskretyzacji w dziedzinie czasu, czyli próbkowaniu zazwyczaj ze stałym krokiem, jak i w dziedzinie wartości, czyli kwantowaniu w kwantyzatorach typu *roundoff*. W procesie estymacji z udziałem sygnałów *ditherowych*, sygnały *ditherowe* $d_1(t)$ $d_2(t)$ dodawane są do sygnałów przetwarzanych $x(t)$ oraz $y(t)$. Uzyskane w ten sposób sygnały $x_1(t)$ i $y_1(t)$ są następnie przetwarzane do postaci cyfrowej $x_{1q}(i\Delta t)$ i $y_{1q}(i\Delta t)$, opóźniane względem siebie o k próbek, mnożone i uśredniane. Tak otrzymane estymatory przyjmują postać [1]:

$$\tilde{R}_x^d(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q1}(i\Delta t) x_{1q2}(i\Delta t + k\Delta t) \quad (4)$$

$$\tilde{R}_{xy}^d(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_{1q1}(i\Delta t) y_{1q2}(i\Delta t + k\Delta t) \quad (5)$$

gdzie: Δt – krok próbkowania, M – liczba pobranych próbek, $k\Delta t$ – opóźnienie.

Przy analizowaniu jakości estymatorów brane są pod uwagę następujące ich właściwości: estymator powinien być nieobciążony, zgodny oraz efektywny, czyli nieobciążony o najmniejszej wariancji [1]. O efektywności estymatora decyduje jego wariancja opisująca losową składową [1, 4]:

$$Var[\tilde{\Psi}] = E[(\tilde{\Psi} - E\tilde{\Psi})^2] = E[\tilde{\Psi}^2] - E^2[\tilde{\Psi}] \quad (6)$$

Natomiast miarą błędu systematycznego jest obciążenie estymatora:

$$b[\tilde{\Psi}] = E\tilde{\Psi} - \Psi \quad (7)$$

Na podstawie zebranych wyników pomiarów (wyników estymacji) nie można wyznaczyć wartości oczekiwanej, obciążenia czy wariancji estymatora. Można je jednak oszacować. Wartość oczekiwaną estymatora $\tilde{\Psi}$ parametru Ψ szacuje się na podstawie wartości średniej arytmetycznej z N wyników estymacji:

$$\bar{\tilde{\Psi}} = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \tilde{\Psi}_k \quad (8)$$

natomiast obciążenie i wariancję estymatora odpowiednio na podstawie zależności [1, 4, 5]:

$$\bar{b}[\tilde{\Psi}] = \bar{\tilde{\Psi}} - \Psi \quad (9)$$

$$\tilde{Var}[\tilde{\Psi}] = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N [\tilde{\Psi}_k - \bar{\tilde{\Psi}}]^2 \quad (10)$$

Przy szacowaniu błędów estymacji stosuje się często w metrologii normowanie względem wielkości estymowanej. Niekiedy bowiem ze wzrostem argumentu, którego funkcją jest wielkość estymowana, wariancja czy obciążenie estymatora maleje, ale wolniej niż szacowana wielkość, co może powodować zbyt optymistyczne wnioskowanie o błędach estymacji. Unormowane błędy noszą wówczas odpowiednio nazwę [1, 4, 6]:

- względnego błędu standardowego równego względnej niepewności standardowej typu A:

$$\xi_{\tilde{\Psi}} = \frac{\sqrt{Var[\tilde{\Psi}]}}{\Psi} \quad (11)$$

- względnego obciążenia odpowiadającego względnej niepewności rozszerzonej typu B:

$$\delta_{\tilde{\Psi}} = \frac{b}{\Psi} \quad (12)$$

Jeżeli znana jest dokładna wartość obciążenia, to można ją uwzględnić stosując poprawkę do wyniku, w innym przypadku obciążenie podawane jest w postaci niepewności typu B [1, 6].

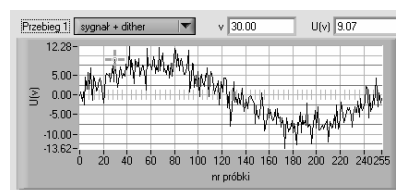
3. Model wirtualnego korelatora

Do realizacji modelu wirtualnego korelatora zastosowano środowisko LabWindows® firmy National Instruments w wersji 7.0. Środowisko LabWindows umożliwia projektowanie złożonych aplikacji pomiarowych przeznaczonych do pracy w systemie operacyjnym Windows [7]. Posiada ciągle powiększającą się, rozbudowaną listę funkcji umożliwiających przetwarzanie danych, a także graficzny interfejs użytkownika, którego właściwości pozwalają na odtworzenie głównego panelu przyrządu, co prowadzi do powstania tzw. przyrządu wirtualnego. Typowy projekt zrealizowany w tym środowisku może zawierać pliki źródłowe w C, moduły DLL, moduły wynikowe OBJ oraz programy obsługi urządzeń i pliki interfejsu użytkownika [7]. Ponadto oprogramowanie LabWindows posiada narzędzia automatyzujące proces tworzenia aplikacji.

Wykonany przez autorkę model wirtualnego korelatora umożliwia przeprowadzanie badań symulacyjnych dotyczących wpływu sygnału *ditherowego* na składowe niepewności cyfrowych estymatorów funkcji korelacyjnych:

- autokorelacji sygnału w torze pierwszym;
- korelacji wzajemnej sygnałów w torze pierwszym i drugim modelu korelatora.

Program umożliwia generowanie różnych typów sygnałów: harmonicznego, trójkątnego, piłokształtnego lub prostokątnego o zadanych przez użytkownika parametrach, takich jak: amplituda, częstotliwość i przesunięcie fazowe (rys. 1).



Rys. 1. Sygnał harmoniczny z *ditherem* o rozkładzie normalnym
Fig. 1. A harmonic signal with Gaussian *dither*

Generowane są także dwa typy sygnałów *ditherowych*:

- sygnał o rozkładzie normalnym, zerowej wartości średniej i zadanej wartości odchylenia standardowego;
- sygnał o rozkładzie równomiernym, zerowej wartości średniej i zadanej wartości amplitudy.

W obu kanałach korelatora możliwe jest kwantowanie sygnałów. Przetwarzanie A/C realizowane jest za pomocą bipolarnego przetwornika o podanych przez użytkownika parametrach przetwarzania takich jak: liczba B bitów przetwornika oraz zakres przetwarzania $U_{FS}[V]$. Podczas przetwarzania sygnału z *ditherem* należy zwrócić uwagę, aby sygnał z *ditherem* nie przekroczył zakresu przetwornika. W tym celu maksymalną wartość generowanego napięcia należy obliczyć korzystając z zależności, dla *dithera* gaussowskiego:

$$U_{FS} = A + 3\sigma_{max} \quad (13)$$

gdzie: A – amplituda przetwarzanego sygnału, σ_{max} – przyjęta maksymalna wartość odchylenia standardowego *dithera*, oraz dla *dithera* o rozkładzie równomiernym:

$$U_{FS} = A + A_{max} \quad (14)$$

gdzie A_{max} jest maksymalną wartością amplitudy *dithera*.

Program umożliwia także ustawienie następujących parametrów przetwarzania:

- częstotliwości próbkowania sygnału;
 - liczby próbek sygnału;
 - wartości przesunięcia czasowego funkcji korelacji;
 - obliczonej, teoretycznej wartości estymatora funkcji korelacyjnej.
- Podczas wykonywania eksperymentu można uzyskać następujące wyniki:

- wartość średnią arytmetyczną z N wyników estymacji (8);
- obciążenie estymatora będące miarą błędu systematycznego (9);
- wariancję estymatora opisującą losową składową błędów (10);
- względny błąd standardowy równy względnej niepewności standardowej typu A (11);
- względne obciążenie odpowiadające względnej niepewności rozszerzonej typu B (12).

Ponadto program umożliwia śledzenie przetwarzanych sygnałów w poszczególnych etapach eksperymentu poprzez jego wizualizację na grafie oraz możliwość odczytu poszczególnych wartości sygnałów. Istnieje także możliwość prezentacji funkcji korelacyjnych na korelogramie.

W omawianym programie, podczas operacji przetwarzania A/C, korelacji sygnałów oraz wyznaczania składowych niepewności, wykorzystano funkcje opracowane przez autorkę.

W celu zobrazowania sposobu przeprowadzania badań symulacyjnych z wykorzystaniem korelatora, w dalszej części artykułu zostanie opisany przebieg przykładowego eksperymentu.

4. Przebieg eksperymentu

W charakterze przykładu dokonano pomiaru wpływu sygnału *ditherowego* o rozkładzie normalnym na względne obciążenie (odpowiadające względnej niepewności rozszerzonej typu B) cyfrowego estymatora wartości średniokwadratowej sygnału harmonicznego, będącego wartością funkcji autokorelacji dla argumentu równego zero (2).

Uwzględniając wyrażenia (2) oraz (9) możemy zależność (12) przedstawić jako:

$$\delta(\sigma/q) = \frac{\bar{R}_x^d(0, N) - R_x(0)}{A^2/2} \quad (15)$$

gdzie $\bar{R}_x^d(0, N)$ jest średnią arytmetyczną z N wyników estymacji wartości średniokwadratowej.

Podczas wykonywania eksperymentu przyjęto następujące parametry sygnałów:

- sygnał harmoniczny o amplitudzie równej 8 V i częstotliwości 1 kHz,
 - sygnał *ditherowy* o rozkładzie normalnym oraz wartości skutecznej $\sigma = 0, 0.2q, 0.3q, 0.5q, 0.8q, 1q$;
- oraz parametry przetwarzania A/C:
- przetwornik bipolarny A/C o rozdzielczości 3 i 6 bitów;
 - częstotliwość próbkowania sygnału równa 8192 kHz,
 - 8192 liczby próbek sygnału.

Eksperyment przebiegał w ten sposób, że dla wirtualnego korelatora zostały wygenerowane sygnały harmoniczne i *ditherowe*. Aby sygnał z *ditherem* nie przekroczył zakresu przetwornika dobrano maksymalną wartość generowanego sygnału dla *dithera* o odchyleniu $\sigma_{max} = 1q$ zgodnie z zależnością (13) oraz wzorem:

$$q = \frac{2 \cdot U_{FS}}{2^B} \quad (16)$$

gdzie: q – krok kwantowania, U_{FS} – zakres przetwarzania, B – liczba bitów przetwornika bipolarnego.

Następnie obliczono wartość średniokwadratową sygnału harmonicznego z *ditherem* uwzględniając poprawkę Sheppard'a:

$$R_x(0) = \frac{A^2}{2} + \sigma_d^2 + \frac{q^2}{12} \quad (17)$$

Po wprowadzeniu do modelu wirtualnego korelatora obliczonych parametrów, dokonano pomiaru wartości względnego obciążenia dla równego zero argumentu funkcji autokorelacji oraz liczby powtórzeń eksperymentu $N=1000$.

5. Uzyskane wyniki oraz ich ocena

W ramach sprawdzenia poprawności działania aplikacji dokonano w programie Mathcad analizy teoretycznej względnego obciążenia δ_M estymatora wartości średniokwadratowej sumy sygnału harmonicznego i gaussowskiego *dithera* w funkcji σ/q dla $A=8$ V, na podstawie zależności [1]:

$$\delta_M(\sigma/q) = \frac{b}{0.5 \cdot A^2} = \quad (18)$$

$$= 2 \sum_{i=1}^{+\infty} \left[(-1)^i \cdot \left(\left(2 \cdot \frac{\sigma}{q} \cdot \left(\frac{A}{q} \right)^{-1} \right)^2 + \beta^2 \right) \cdot J_0(2\beta) + 2\beta^{-1} \cdot J_1(2\beta) \right] \cdot e^{-2 \left(\pi \cdot i \cdot \frac{\sigma}{q} \right)^2}$$

gdzie $\beta = \pi \cdot i \cdot \frac{A}{q}$.

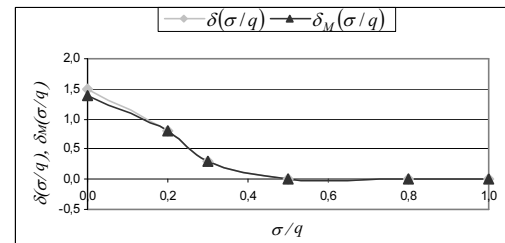
Na rys. 2 przedstawiono przykładowe wyniki badań (15) oraz analiz matematycznych (18). Jak wynika z wykresów, względne obciążenie estymatora maleje wraz ze wzrostem wartości skutecznej sygnału *ditherowego* w stosunku do kroku kwantowania prze-

twornika, a uzyskane z eksperymentu wyniki są zbliżone z obliczonymi w programie Mathcad. Wartości względnego obciążenia estymatora dla przetwornika 3-bitowego i $\sigma/q = 0,5$ wynoszą odpowiednio:

$$\delta(0,5) = -1,19 \cdot 10^{-3}, \quad \delta_M(0,5) = -1,54 \cdot 10^{-3},$$

natomiast dla przetwornika 6-bitowego:

$$\delta(0,5) = 1,37 \cdot 10^{-5}, \quad \delta_M(0,5) = 1,24 \cdot 10^{-5}.$$



Rys. 2. Względne obciążenie estymatora wartości średniokwadratowej sygnału harmonicznego z gaussowskim *ditherem* w funkcji σ/q , przetwornik 6-bitowy

Fig. 2. Relative bias of the mean square value estimator of the harmonic signal with Gaussian *dither* as function of σ/q , 6-bit converter.

6. Podsumowanie

Zagadnienie wpływu sygnału *ditherowego* na dokładność estymacji funkcji korelacyjnych jest konsekwentnie pomijane w podręcznikach uważanych za znaczące w dziedzinie miernictwa stochastycznego i techniki korelacyjnej. Jest to spowodowane złożonością problemu i trudnością z uogólnieniem wniosków.

Ponieważ na podstawie analitycznych modeli błędów estymacji funkcji korelacyjnych trudno jest szacować dokładność w wielu sytuacjach pomiarowych, w celu przeprowadzenia badań eksperymentalnych, został opracowany przez autorkę model wirtualnego korelatora. Ze względu na bogate biblioteki zawierające procedury przetwarzania sygnałów, rozbudowany aparat matematyczny oraz przyjazny interfejs użytkownika, do opracowania modelu, wykorzystano środowisko LabWindows firmy National Instruments. W programie zostały zastosowane oryginalne procedury określania funkcji korelacyjnych, ponieważ dostępne funkcje pakietu LabWindows prowadziły do niewiarygodnych wyników. Zaprezentowane w artykule rezultaty, będące częścią prowadzonych badań, są zbliżone z wynikami analiz matematycznych.

Opracowany model wirtualnego korelatora umożliwi także przeprowadzenie, nie publikowanych dotychczas, badań eksperymentalnych wpływu sygnałów *ditherowych* na - charakteryzującą rozrzut wyników - niepewność typu A estymatorów funkcji korelacyjnych.

7. Literatura

- [1] Lal-Jadziak J.: Kształtowanie dokładności w pomiarach korelacyjnych, Seria Monografie, nr 101, Wyd. Politechniki Zielonogórskiej, Zielona Góra 2001.
- [2] Lal-Jadziak J.: Wpływ kwantowania na dokładność estymacji wartości średniokwadratowej, Pomiary Automatyka Kontrola nr 7,8 2002.
- [3] Bendat J. S., Piersol A. G.: Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych, PWN, Warszawa 1976.
- [4] Hasse L., Spiralski L.: Szumy elementów i układów elektronicznych, WNT, Warszawa 1981.
- [5] Konecki W.: Statystyka dla inżynierów, PWN, Warszawa 1999.
- [6] Barzykowski J. (red.), Współczesna metrologia. Zagadnienia wybrane, WNT, Warszawa 2004.
- [7] LabWindows/CVI Internet Developers Toolkit Online Help.