Monika WIŚNIEWSKA, Marian ADAMSKI**

Zastosowanie dualizmu hipergrafów w dekompozycji równoległej automatów współbieżnych

Wiele metod analizy systemów dyskretnych, stosowanych podczas analizy lub syntezy układów cyfrowych, wykorzystuje klasyczne grafy niekierowane [7]. W związku ze wzrostem skomplikowania układów cyfrowych jest konieczna modyfikacja już istniejących algorytmów tak, aby abstrakcyjne modele w zwarty, intuicyjny sposób odzwierciedlały najistotniejsze cechy projektowanych struktur. Rozwiązaniem problemu może być zastosowanie hipergrafów, będących uogólnieniem grafów niekierowanych [5,7,8]. Wykorzystanie ich do przeprowadzania operacji stosowanych w technice cyfrowej wydaje się intuicyjne, bardziej przejrzyste i efektywniejsze niż w przypadku klasycznych grafów.

W artykule przedstawiono sposób dekompozycji równoległej cyfrowych układów współbieżnych, opisanych z wykorzystaniem sieci Petriego, przeprowadzanej za pośrednictwem dekompozycji hipergrafów. Celem dekompozycji jest podział rekonfigurowanego sterownika logicznego na współbieżne moduły, z których każdy może być optymalizowany i syntezowany z wykorzystaniem klasycznej teorii automatów cyfrowych. W referatach [10] oraz [11] przedstawiono sposób oparty na kolorowaniu oraz pokryciu dopełnienia hipergrafu. Niniejszy rozpatruje możliwość zastosowania dualności hipergrafu w procesie dekompozycji sterowników logicznych opisanych sieciami Petriego.

Podstawowe definicje

Aby opisać sposób zwartej reprezentacji przestrzeni stanów lokalnych automatu współbieżnego (współbieżnej maszyny stanów) za pomocą hipergrafu, przedstawia się podstawowe pojęcia związane z sieciami Petriego [4,6] oraz z hipergrafami [5,7].

Sieć Petriego

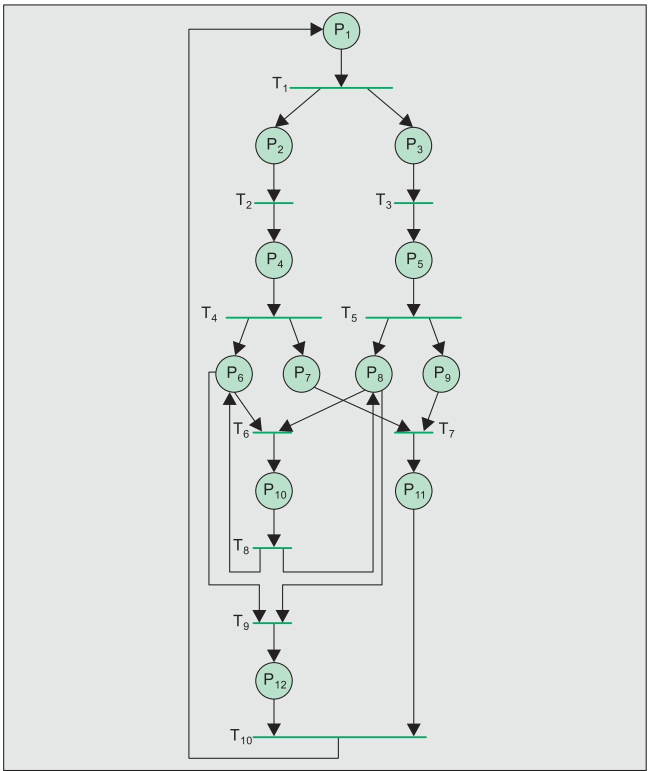
Sieć Petriego jest dwudzielnym grafem skierowanym o dwóch rodzajach wierzchołków: miejscach i tranzycjach połączonych skierowanymi łukami, co w wygodny sposób umożliwia opisywanie zjawisk zachodzących współbieżnie. Miejsca są przedstawiane jako okręgi, tranzycje jako pogrubiony odcinek lub prostokąt, natomiast łuki jako krawędzie zakończone strzałkami. Sieć Petriego umożliwia opis i analizę systemów dyskretnych, charakteryzujących się asynchronicznością, niedeterminizmem czy równoległością. Przykładową sieć Petriego *PN1*, opisującą urządzenie do produkcji napojów [9, 12], przedstawiono na rys. 1.

Hipergrafy

Hipergraf jest rozszerzeniem pojęcia grafu. Jego krawędzie, zwane hiperkrawędziami, mogą być incydentne do dowolnej liczby wierzchołków [5,7,8], podczas gdy w klasycznym grafie krawędzie mogą być incydentne maksymalnie do dwóch wierzchołków.

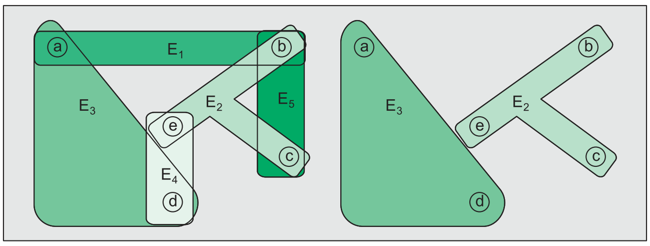
Hipergraf *H* definiuje dwójka *H* = (*V, E*), gdzie *V* jest dowolnym, niepustym zbiorem wierzchołków, natomiast *E* jest zbiorem krawędzi, czyli podzbiorem zbioru wszystkich możliwych zbiorów, których elementy należą do V. Najczęściej stosowaną reprezentacją hipergrafu jest macierz incydencji, w której kolumny odpowiadają wierzchołkom, zaś wiersze krawędziom hipergrafu.

Dla każdego hipergrafu *H* = (*V, E*) istnieje hipergraf dualny *H** = (*E, V*), którego krawędzie odpowiadają wierzchołkom hipergrafu H, natomiast wierzchołki – krawędziom. Macierz incydencji hipergrafu dualnego *H** jest transponowaną macierzą hipergrafu *H*. Analogicznie macierz *H* jest transponowaną macierzą hipergrafu *H**.



■ **Rys. 1. Przykład sieci Petriego PN_1**

Dokładną transwersalą *D* hipergrafu *H* jest minimalna liczba hiperkrawędzi incydentnych do wszystkich wierzchołków hipergrafu, przy czym każdy wierzchołek może być incydentny tylko do jednej z hiperkrawędzi tworzących transwersalę. Jest oczywiste,



■ **Rys. 2. Hipergraf oraz jego dokładna transwersala**

*** Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki I Elektroniki, e-mail: M.Wisniewska@weit.uz.zgora.pl, M.Adamski@iie.uz.zgora.pl**

że zbiór dokładnych transwersali D to podzbiór zbioru T wszystkich transwersali hipergrafu H.

Na rys. 2 przedstawiono hipotetyczny hipergraf H, który zawiera pięć wierzchołków $V=\{a, b, c, d, e\}$ oraz pięć hiperkrawędzi $E=\{E_1, \dots, E_5\}$. W rozpatrywanym przypadku istnieje tylko jedna dokładna transwersala $D_1=\{E_2, E_3\}$. Przykładowo wszystkie wierzchołki hipergrafu pokryje także transwersala $T_1=\{E_1, E_4, E_5\}$, jednakże nie jest to transwersala dokładna – wierzchołek b jest incydentny zarówno do hiperkrawędzi E_1 jak i E_5.

Idea proponowanej metody

Tradycyjne metody dekompozycji sieci Petriego są oparte na wykorzystaniu grafów współbieżności [1,2,3,6]. W niniejszym artykule proponuje się przedstawić przestrzeń stanów za pomocą hipergrafu klikowego H, odpowiadającego grafowi współbieżności G.

Dekompozycja sieci Petriego z wykorzystaniem proponowanej metody może zostać podzielona na następujące etapy:
- utworzenie makrosieci dla rozpatrywanej sieci Petriego,
- wyznaczenie hipergrafu znakowań H,
- wyznaczenie hipergrafu H^* dualnego dla hipergrafu H,
- wyznaczenie wszystkich dokładnych transwersali hipergrafu H*,
- wyznaczenie poszczególnych podsieci automatowych oraz redukcja miejsc pojawiających się równocześnie w kilku składowych.
- Zastąpienie makromiejsc odpowiednimi podzbiorami miejsc rozpatrywanej sieci.

Opisana procedura jest równocześnie dogodnym narzędziem sprawdzania fizycznej realizowalności projektowanego automatu (cechowanie automatu współbieżnego) oraz przygotowuje dane do kodowania jego stanów globalnych [1,2,3].

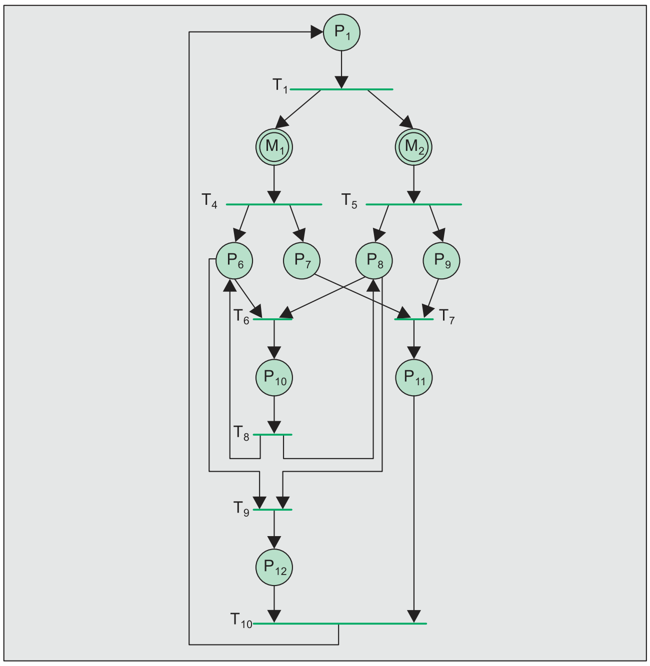
Przykład dekompozycji sieci Petriego z wykorzystaniem proponowanej metody

Aby przedstawić ideę projektowania rekonfigurowanego sterownika logicznego zostanie wykorzystana sieć Petriego PN_1, przedstawiona na rys. 1. Na jej podstawie zostaną pokazane zalety wykorzystania hipergrafów w dekompozycji równoległej. Inspiracją był podobny przykład specyfikacji behawioralnej sterownika dla urządzenia do produkcji napojów, przedstawionej w formie sieci sterowania Petriego [9, 12].

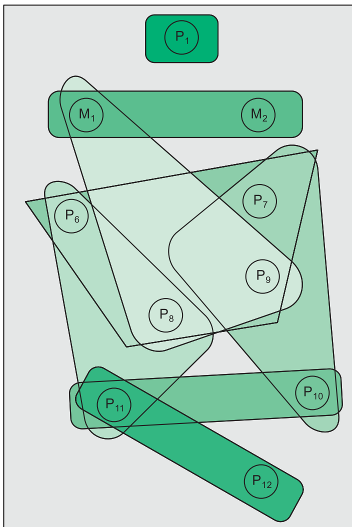
Pierwszy krok, jaki należy wykonać, to utworzenie makrosieci dla rozpatrywanej sieci Petriego [6]. Na tym etapie należy wyznaczyć makrosieć, która jest skondensowaną wersją danej sieci Petriego, zachowującą jej podstawową strukturę i właściwości. Ma to na celu usunięcie z sieci tych fragmentów, które podczas procesu analizy nie wpłyną na jej ostateczny wynik, a ich obecność jedynie zwiększa czas procesu analizy. Utworzone makromoduły zawierają jedynie tranzycje wielowejściowe i wielowyjściowe oraz miejsca zastępujące jednoznakowe fragmenty sieci. Opisujące je makromiejsca są monoaktywne.

Na podstawie makrosieci przedstawionej na rys. 3 zostaje wyznaczony hipergraf znakowań. Czynność ta polega na analizowaniu zmian oznakowania sieci w miarę realizacji (odpalania) gotowych tranzycji i na zapisywaniu wszystkich możliwych stanów. Hiperkrawędzie określają zbiór miejsc oznakowanych w danym stanie, natomiast wierzchołki odpowiadają makromiejscom (rys. 4). Na podstawie hipergrafu przedstawionego na tym rysunku w prosty sposób można określić hipergraf dualny H^*. Macierz incydencji hipergrafu H^* jest macierzą transponowaną hipergrafu H (rys. 5).

Kolejny krok to wyznaczenie wszystkich dokładnych transwersali hipergrafu dualnego. Proces wyznaczania transwersali został

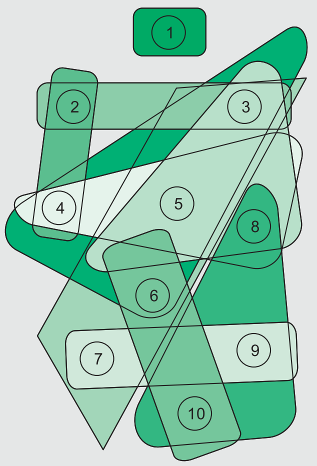


■ **Rys. 3. Makrosieć dla sieci Petriego PN_1**



P_1	M_1	M_2	P_6	P_7	P_8	P_9	P_{10}	P_{11}	P_{12}	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	2
0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	3
0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	4
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	5
0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	6
0	0	0	0	1	0	1	1	0	0	7
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	8
0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	9
0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	10

■ **Rys. 4. Hipergraf znakowań dla makrosieci oraz jego macierz incydencji**

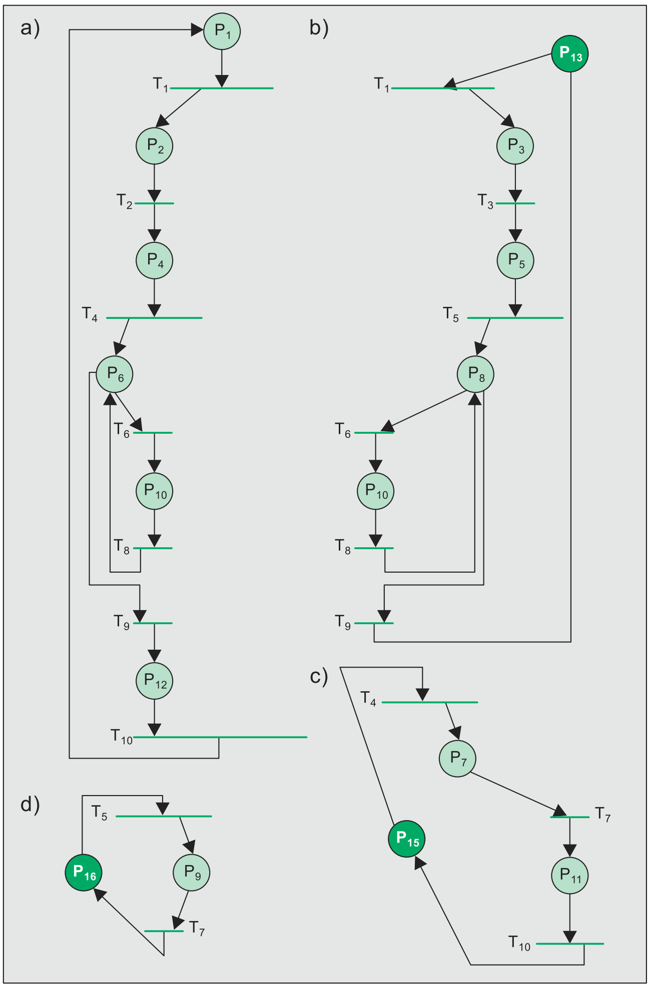


1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	P_1
0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	M_1
0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	M_2
0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	P_6
0	0	1	0	1	1	1	0	0	0	P_7
0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	P_8
0	0	0	1	1	1	1	0	0	0	P_9
0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	P_{10}
0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	P_{11}
0	0	0	0	0	1	0	0	0	1	P_{12}

■ **Rys. 5. Hipergraf dualny H^* oraz jego macierz incydencji** bardzo dokładnie omówiony w literaturze [5,7], dlatego też nie będzie przedstawiony w niniejszym artykule. Dla hipergrafu H^* istnieją cztery dokładne pokrycia: $D_1=\{P_1, M_1, P_6, P_{10}, P_{12}\}$, $D_2=\{P_1, M_1, P_7, P_{11}\}$, $D_3=\{P_1, M_2, P_8, P_{10}, P_{12}\}$, $D_4=\{P_1, M_2, P_9, P_{11}\}$.

W tym miejscu należy podkreślić fakt, że dualność hipergrafów, poza procesem dekompozycji ,jednocześnie umożliwia analizę projektowanego systemu dyskretnego. Istnienie dokładnych transwersali hipergrafu oznacza, że sieć Petriego została zaprojektowana prawidłowo. Każda z transwersali wyznacza możliwą ścieżkę od miejsca początkowego do miejsca końcowego w sieci Petriego.

W kolejnym etapie dekompozycji należy określić podsieci typu automatowego, na podstawie wyznaczonych dokładnych transwersali hipergrafu dualnego. Ponadto są usuwane ewentualne nadmiarowe składowe. Dla rozpatrywanego przykładu istnieją cztery dokładne transwersale, przy czym niektóre miejsca powtarzają się w kolejnych transwersalach (np. miejsce P_1 występuje we wszystkich pokryciach, miejsce M_1 pojawia się w transwersalach D_1 oraz D_2 itd). Wynikiem tej operacji będą zbiory niezależne, które jednoznacznie wskażą składowe automatowe. Należy tutaj zauważyć, że kolejność analizowanych transwersali ma wpływ na podział sterownika. W prezentowanym przykładzie przyjęto kolejność numeryczną, tzn. najpierw będzie analizowana transwersala D_1, później kolejno: D_2, D_3 oraz D_4. W wyniku redukcji składowych hipergrafu H*, zbiór transwersali dokładnych przyjmie postać: $D=\{D_1, D_2, D_3, D_4\}$, gdzie $D_1=\{P_1, M_1, P_6, P_{10}, P_{12}\}$, $D_2=\{P_7, P_{11}\}$, $D_3=\{M_2, P_8\}$, $D_4=\{P_9\}$.



■ **Rys. 6. Podsieci typu automatowego dla początkowej sieci Petriego PN_1**

Rys. 6 przedstawia końcowy rezultat procesu dekompozycji, czyli składowe podsieci typu automatowego. Makromiejsca M_1 oraz M_2 zostały zastąpione odpowiednio miejscami początkowej sieci PN_1. Ponadto, jeżeli dany zbiór nie zawierał początkowego oznakowanego miejsca sieci, to zostało dodane do niego dodatkowe miejsce spoczynkowe, zawierające znak (np. miejsce P_{13} na rys. 6b).

* * *

Hipergraf umożliwia w przejrzysty sposób opisywanie zarówno relacji współbieżności między poszczególnymi stanami lokalnymi, jak i również ich przynależność do tego samego stanu globalnego skończonej maszyny stanów. Ułatwia to analizę programu funkcjonowania sterownika, który został przedstawiony w formie graficznej.

W artykule przedstawiono sposób zwartej reprezentacji przestrzeni stanów lokalnych dla rekonfigurowanego sterownika logicznego, na podstawie teorii hipergrafów. Ponadto zaproponowana metoda dekompozycji z wykorzystaniem dualizmu hipergrafów umożliwia stwierdzenie poprawności projektowanego układu.

Przedstawiony algorytm zapewnia zredukowanie złożoności obliczeniowej procesu dekompozycji, w porównaniu do metod zaproponowanych w [10] oraz [11]. Wynika to z braku konieczności wyznaczania dopełnienia czy też kolorowania wierzchołków hipergrafu.

LITERATURA

[1] Adamski M., Chodań M.: *Modelowanie układów sterowania dyskretnego z wykorzystaniem sieci SFC*. Wydawnictwo PZ, Zielona Góra, 2000.

[2] Adamski M., Karatkievich A., Węgrzyn M. (ed.): *Design of Embeded Control Systems*. Springer Science (USA), 2005.

[3] Bilinski K., Adamski M., Saul J. M., Dagless E. L.: *Petri-net-based algorithms for parallel-controller synthesis.* IEE Proceedings – Computers and Digital Techniques, 1994, Vol. 141, No 6, s. 405--412

[4] Banaszak Z., Kuś J., Adamski M.: *Sieć Petriego*. Modelowanie, sterowanie i synteza systemów dyskretnych, Wydawnictwo Wyższej Szkoły Inżynierskiej, Zielona Góra 1993.

[5] Berge C.: *Graphs and Hypergraph*, North-Hols. r Mathematical Library, Amsterdam 1976.

[6] David R., Alla H.: Petri Nets & Grafcet. *Tools for modelling discrete event systems*, Prentice Hall, New York, 1992.

[7] De Micheli G.: *Synteza i optymalizacja układów cyfrowych*, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne, Warszawa 1998.

[8] Łuba T.: *Synteza układów logicznych,* Wyższa Szkoła Informatyki Stosowanej i Zarządzania, Warszawa 2000.

[9] Roguska A.: *Ocena przydatności praktycznej interpretowanej sieci Petriego*, sieci Grafcet i sieci SEC na podstawie projektu układu sterowania binarnego, Politechnika Zielonogórska, 2001 (praca inżynierska).

[10] Wiśniewska M.: *Wykorzystanie hipergrafów w dekompozycji sieci Petriego na podsieci typu automatowego,* Materiały konferencyjne: VII Międzynarodowe Warsztaty Doktoranckie OWD, Wisła, 2005, 81-84.

[11] Wiśniewska M., Wiśniewski R., Adamski M.: *Usage of hypergraph theory in decomposition of concurrent automata*, PAK,. 2007, nr 7

[12] Valette R.: *Etude comparative de deux outils de representation: Grafcet et reseau de Petri*, LeNouvel Automatisme, decembre 1978

Artykuł recenzowany