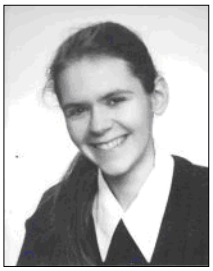
Aneta BAL-SZYDA
POLITECHNIKA ŚLĄSKA, INSTYTUT AUTOMATYKI

Stabilność ciągłych układów liniowych o zmiennych skokowo współczynnikach

mgr inż. Aneta BAL-SZYDA



Absolwentka Politechniki Śląskiej. Obecnie jest doktorantką na kierunku Automatyka i Robotyka w Instytucie Automatyki Politechniki Śląskiej w Gliwicach. Jej zainteresowania badawcze obejmują głównie zagadnienia związane z zastosowaniem matematyki w teorii sterowania. Prowadzi również prace z zakresu akwizycji i przetwarzania obrazów barwnych na potrzeby cyfrowej archiwizacji i prezentacji multimedialnej obiektów zabytkowych.

e-mail: Aneta.Bal@polsl.pl

Streszczenie

W pracy przedstawiono problem wyznaczenia stabilności dla ciągłych układów liniowych o zmiennych współczynnikach w czasie, gdzie funkcja przełączająca jest przedziałami stała. Rozpatrywane były układy jedno (opisane skalarami) i wielowymiarowe (opisane przez macierze) niestacjonarne, dla tych układów wyznaczone zostały warunki stabilności za pomocą wykładników Lapunowa, wartości własnych oraz promienia spektralnego. Wyprowadzone warunki posłużyły do określenia asymptotycznej stabilności liniowych układów ciągłych o zmiennych skokowo współczynnikach.

Słowa kluczowe: stabilność asymptotyczna, wykładnik Lapunowa, liniowy układ ciągły ze skokowo zmieniającymi się współczynnikami

Stability of linear time-varying systems with continuous time

Abstract

Stability and stability conditions are one of the most important problem in a system projecting process. For stationary systems stability conditions are well known. There are many methods described in the literature for such systems that determine conditions for the system stability [1, 2, 3]. For complex systems where state depends on switching signal (Fig. 1) the stability conditions are not so obvious. In this paper stability problem for continuous time-varying linear systems with piecewise constant switching signal is presented. In section 1. continuous linear time-varying systems (1) and the main definitions of Lapunov exponent and asymptotic stability are presented. In section 2. (section 3.) onedimensional – described by scalar (multidimensional – described by matrices) notstationary systems are consider, for such systems the stability conditions are proposed with the aid of Lapunov exponent (definitions and lemma) [4], matrix norm, eigenvalues and spectral radius. The results derived stability conditions are demonstrated by numerical examples in Section 4. Derived stability conditions are very useful for describing asymptotic stability of linear time-varying systems with continuous time.

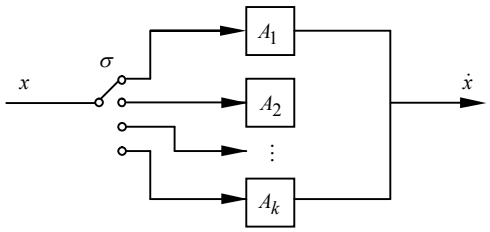
Keywords: asymptotic stability, Lyapunov exponent, linear continuous time-varying system

1. Wstęp

Zapewnienie stabilności układów jest głównym zagadnieniem decydującym o poprawnym jego działaniu. Podczas konstruowania, a następnie badań i symulacji konieczne jest sprawdzenie czy badany obiekt jest stabilny oraz określenie nastaw dla jakich układ ten jest stabilny. W określeniu stabilności dla interesującego układu lub dla jakiej klasy układy te są stabilne przydatne i szybkie w ocenie są warunki stabilności.

Dla układów stacjonarnych, gdzie w dowolnej chwili czasu równania opisujące działanie układu nie zmieniają się lub też ich współczynniki są stałe znane są zarówno warunki stabilności jak i różne metody służące do jej określania [1, 2, 3]. Dla układów liniowych, zarówno ciągłych jak i dyskretnych, w których w dowolnej chwili czasu badany układ opisany jest tylko jedną, niezmienną w czasie macierzą stanu jedną z metod określenia stabilności jest wyrażenie warunków przez wartości własne macierzy opisującej działanie układu stacjonarnego. W przypadku układu ciągłego warunek stabilności jest taki, aby wszystkie wartości własne leżały w lewej półpłaszczyźnie.

W sytuacji kiedy działanie układu opisane jest zmiennymi w czasie współczynnikami mamy do czynienia z układem niestacjonarnym. W literaturze dla układów stacjonarnych podawane są warunki stabilności, dla układów niestacjonarnych są one cały czas poszukiwane. W tego typu układach, gdzie współczynników lub macierzy stanu jest wiele, gdzie nie są one stałe lecz zmienne w czasie problem określenia czy dany układ jest czy nie jest stabilny nie jest zadaniem łatwym i trywialnym. Znalezione warunki stabilności ze względu na złożoność samego problemu, wielość rozpatrywanych przypadków są bardziej skomplikowane. Układy niestacjonarne można obrazowo pokazać jako układy z przełączeniami (Rys. 1), gdzie przełączamy się między poszczególnymi współczynnikami A_i, a o kolejności i czasie przebywania w danym stanie decyduje funkcja przełączająca σ. Zatem o stabilności układów z przełączeniami decydować będzie m.in. rodzaj macierzy, między którymi układ się przełącza czas przebywania układu w każdym ze stanów czy sekwencja przełączeń.



Rys. 1. Układ z przełączeniami jako przykład układu o zmiennych współczynnikach w czasie
Fig. 1. Switching system as an example of time-varying system

W pracy omówione i wyprowadzone zostaną warunki stabilności dla liniowych układów ciągłych ze skokowo zmieniającymi się współczynnikami. Tego typu układy opisane są równaniem:

$$\dot{x}(t) = A_\sigma(t)x(t), \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{1}$$

z odpowiadającym warunkiem początkowym $x(0) = x_0$. Dla funkcji przełączającej σ przedziałami stałej, lewostronnie ciągłej, gdzie w danym przedziale czasu działanie układu opisane jest przez stałą, niezmienną macierz stanu A zależną od chwili t rozwiązaniem równania (1) jest:

$$x(t, x_0) = \left[e^{A(t_k)(t-t_k)} e^{A(t_{k-1})(t_k-t_{k-1})} \cdot \ldots \cdot e^{A(0)(t_1)} \right] \cdot x(0), \tag{2}$$

gdzie chwile t_i, $i = 1,2,\ldots$ są chronologicznymi chwilami czasu, w których następują kolejne przełączenia.

Warunki stabilności zostaną wyprowadzone zgodnie z podaną definicją.

Definicja 1. Układ (1) nazywamy asymptotycznie stabilnym, jeżeli spełniony jest warunek:

$$\forall_{x_0} \quad \lim_{t\to\infty} x(t, x_0) = 0. \tag{3}$$

Warunki na asymptotyczną stabilność dla liniowego układu ciągłego (1) wyprowadzone zostaną przy wykorzystaniu odpowiednio zdefiniowanych wykładników Lapunowa.

Definicja 2. Wykładnikiem Lapunowa nazywamy wartość:

$$\lambda_d(x_0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left| x(t, x_0) \right|^{\frac{1}{t}}, \tag{4}$$

$$\lambda_c(x_0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \left| x(t, x_0) \right|, \tag{5}$$

gdzie $\overline{\lim}_{t\to\infty}$ oznacza granicę górną.

Twierdzenie 1. Układ jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy odpowiedni wykładnik Lapunowa spełnia nierówność [4]:

$$\forall_{x_0} \quad \lambda_d(x_0) < 1, \tag{6}$$

$$\forall_{x_0} \quad \lambda_c(x_0) < 0. \tag{7}$$

2. Przypadek jednowymiarowy

Rozpatrzmy przypadek skalarny równania (1), gdzie układ jest opisany przez:

$$\dot{x}(t) = a_\sigma(t)x(t), \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{8}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 \neq 0$, w którym funkcja przełączająca $\sigma : [0,\infty) \to \{1,\ldots,k\}$ jest lewostronnie ciągła i przedziałami stała. Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ oznaczają kolejne punkty nieciągłości funkcji σ, które będziemy nazywać również chwilami przełączeń. Wówczas na każdym z przedziałów $(\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ funkcja σ jest stała i przyjmuje wartość $a_\sigma(\alpha_{i+1}) \in \{a_1, a_2 \ldots, a_k\}$, $i = 0,1,\ldots$.

Dla ustalonego $t > 0$ oznaczmy przez $n(t_0)$ liczbę elementów zbioru $\{i \in N : \alpha_i \leq t\}$, tzn. $n(t_0)$ jest liczbą przełączeń do chwili t_0. Ponadto zbiór $\{t : \sigma(t) = i\}$, dla $i = 1,\ldots,k$ jest sumą przedziałów; oznaczmy ich łączną długość przez $\tau_i(t)$. Liczbę $\tau_i(t)$ będziemy nazywać czasem przebywania w stanie i do chwili t.

Dla tych oznaczeń rozwiązanie równania (8) ma postać:

$$x(t, x_0) = e^{\tau_1(t)a_1} \cdot e^{\tau_2(t)a_2} \cdot \ldots \cdot e^{\tau_k(t)a_k} \cdot x_0 . \tag{9}$$

Logarytmując obie strony i korzystając z własności logarytmów otrzymamy:

$$\ln|x(t, x_0)| = \tau_1(t)a_1 + \tau_2(t)a_2 + \ldots + \tau_k(t)a_k + \ln|x_0| . \tag{10}$$

Zatem dzieląc obustronnie przez t i przechodząc do granicy $t \to \infty$

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t, x_0)| = \overline{\lim_{t\to\infty}} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{t} \tau_i(t) a_i + \frac{1}{t} \ln|x_0| \right] . \tag{11}$$

Ponieważ

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} (f(t) + g(t)) \leq \overline{\lim_{t\to\infty}} f(t) + \overline{\lim_{t\to\infty}} g(t) , \tag{12}$$

więc

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t, x_0)| &= \overline{\lim_{t\to\infty}} \left[\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{t} \tau_i(t) a_i + \frac{1}{t} \ln|x_0| \right] \leq \\ &\leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{t} \tau_i(t) a_i + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x_0| \end{aligned} \tag{13}$$

i dalej

$$\begin{aligned} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t, x_0)| &\leq \sum_{i=1}^{k} \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \tau_i(t) a_i + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x_0| = \\ &= \sum_{i=1}^{k} a_i \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \tau_i(t) + \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x_0| \end{aligned} . \tag{14}$$

Oznaczając przez $\tau_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \tau_i(t)$ średni czas przebywania układu w stanie *i* do chwili *t* otrzymujemy:

$$\lambda_c(x_0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln|x(t, x_0)| \leq \sum_{i=1}^{k} a_i \tau_i . \tag{15}$$

Na mocy **twierdzenia 1** oznacza to, że układ (8) jest stabilny, jeżeli zachodzi:

$$\sum_{i=1}^{k} a_i \tau_i < 0 . \tag{16}$$

Ponieważ $\tau_i > 0$, dlatego głównym czynnikiem decydującym o stabilności całego układu jest wartość oraz znak a_i.

3. Przypadek wielowymiarowy

Skorzystajmy teraz z normy macierzowej i uogólnijmy przypadek jednowymiarowy omówiony wcześniej na wielowymiarowy. Układ liniowy ciągły ze skokowo zmieniającymi się współczynnikami (1) przełączać się będzie nie między skalarami a_σ (8), jak to miało miejsce w Rozdziale 2., a między macierzami A_σ.

Rozpatrzmy wielowymiarowy liniowy układ ciągły postaci:

$$\dot{y}(t) = A_\sigma(t)y(t), \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{17}$$

z warunkiem początkowym $y(0) = y_0 \neq 0$ oraz dowolną normę macierzową $\|\cdot\|$ mającą własność:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\| . \tag{18}$$

Rozwiązanie $y(t, y_0)$ równania (17) wyrażone jest:

$$y(t, y_0) = \left[e^{A_\sigma(t_k)(t-t_k)} e^{A_\sigma(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})} \cdot \ldots \cdot e^{A_\sigma(0)(t_1)} \right] \cdot y_0 . \tag{19}$$

Stosując (18), otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\|y(t, y_0)\| \leq \\ &\leq \left\| e^{A_\sigma(t_k)(t-t_k)} \right\| \cdot \left\| e^{A_\sigma(t_{k-1})(t_k - t_{k-1})} \right\| \cdot \ldots \cdot \left\| e^{A_\sigma(0)(t_1)} \right\| \cdot \|y_0\| \end{aligned} . \tag{20}$$

Wówczas z (20) i (16) dostajemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 2. Układ ciągły (17) jest stabilny, jeżeli:

$$\|A_1\tau_1\| + \|A_2\tau_2\| + \ldots + \|A_k\tau_k\| < 1 , \tag{21}$$

gdzie: czasy τ_i, $i = 1,2,\ldots,k$ są analogiczne do czasów z układów ciągłych jednowymiarowych (8).

Przytoczmy jeszcze raz definicję wykładnika Lapunowa. Wykładnik ten dla układów ciągłych możemy zapisać:

$$\overline{\lambda}(x_0) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln\|x(\sigma, x_0, t)\| . \tag{22}$$

Do udowodnienia kolejnego twierdzenia skorzystajmy dodatkowo z następujących twierdzeń pomocniczych opisanych szerzej w pracy [1].

Lemat 1. Zbiór $\left\{ \overline{\lambda}(x_0, \sigma) : x_0 \in R^n \right\}$ jest skończony [1]. Oznacza to, że zbiór ten ma co najwyżej n-elementów. Liczba wykładników Lapunowa jest liczbą skończoną i wynosi tyle ile wymiar macierzy.

Lemat 2. Jeżeli wykładniki Lapunowa możemy uporządkować rosnąco $\lambda_1(\sigma) < \ldots < \lambda_k(\sigma)$ oraz największy z tych wykładników jest mniejszy od zera $\lambda_k(\sigma) < 0$, to:

$$\forall_{x_0} \quad \lim_{t\to\infty} x(\sigma, x_0, t) = 0 , \tag{23}$$

istnieje granica i wynosi ona tyle ile największy z tych wykładników [1].

Dodatkowo załóżmy istnienie granicy.

Lemat 3. Jeżeli istnieje granica

$$\tau_i = \overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \tau_i(t) , \tag{24}$$

to zachodzi:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left\| e^{\tau_i(t)A} \right\|^{\frac{1}{t}} = \rho\left(e^{\tau_i A} \right) , \tag{25}$$

dla dowolnej macierzy *A*,

gdzie $\tau_i(t)$ oraz τ_i, jak w Rozdziale 2., oznaczają odpowiednio sumaryczny oraz średni czas przebywania układu w stanie *i* do chwili *t*, natomiast $\rho(macierz)$ oznacza promień spektralny definiowany jako maksymalna, co do wartości bezwzględnej, z warto-

ści własnych λ *macierzy* wyznaczonych z równania charakterystycznego $\det(macierz - \lambda I) = 0$.

Rozważmy jeszcze raz liniowy układ ciągły postaci:

$$\dot{x}(t) = A_\sigma(t)x(t), \quad \text{dla} \quad t \geq 0 \tag{26}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = x_0 \neq 0$.

Rozwiązanie $x(\sigma, x_0, t)$ równania (26) wyrażone jest:

$$x(\sigma, x_0, t) = e^{A_1\tau_1(t)} \cdot e^{A_2\tau_2(t)} \cdot \ldots \cdot e^{A_k\tau_k(t)} \cdot x_0 . \tag{27}$$

Stosując (18) oraz pierwiastkując rozwiązanie (27) i przechodząc do granicy przy $t \to \infty$ otrzymamy:

$$\begin{aligned} &\overline{\lim_{t\to\infty}} \left\| x(\sigma, x_0, t) \right\|^{\frac{1}{t}} \leq \\ &\leq \overline{\lim_{t\to\infty}} \left\| e^{A_1\tau_1(t)} \right\|^{\frac{1}{t}} \cdot \left\| e^{A_2\tau_2(t)} \right\|^{\frac{1}{t}} \cdot \ldots \cdot \left\| e^{A_k\tau_k(t)} \right\|^{\frac{1}{t}} \cdot \left\| x_0 \right\|^{\frac{1}{t}} \end{aligned} . \tag{28}$$

Wykorzystując **twierdzenie 1** układ (26) jest stabilny wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left\| x(t, x_0) \right\|^{\frac{1}{t}} < 1 . \tag{29}$$

Logarytmując nierówność (29) i korzystając z własności logarytmów otrzymamy:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \frac{1}{t} \ln \left\| x(t, x_0) \right\| < 0 \tag{30}$$

zatem lewa strona nierówności (28) jest wykładnikiem Lapunowa mniejszym od zera, a na mocy **lematu 2** wynika, że układ jest stabilny.

Natomiast prawa strona nierówności (28) po wykorzystaniu **twierdzenia 1** ma postać:

$$\overline{\lim_{t\to\infty}} \left\| e^{A_1\tau_1(t)} \right\|^{\frac{1}{t}} \cdot \left\| e^{A_2\tau_2(t)} \right\|^{\frac{1}{t}} \cdot \ldots \cdot \left\| e^{A_k\tau_k(t)} \right\|^{\frac{1}{t}} \cdot \left\| x_0 \right\|^{\frac{1}{t}} < 1 . \tag{31}$$

Zatem po wykorzystaniu założenia z **lematu 3**, że jeżeli istnieje granica i wynosi ona τ_i, możemy zapisać:

$$\rho\left(e^{A_1\tau_1}\right) \cdot \rho\left(e^{A_2\tau_2}\right) \cdot \ldots \cdot \rho\left(e^{A_k\tau_k}\right) < 1 . \tag{32}$$

Zatem zapisać możemy następujące twierdzenie.

Twierdzenie 3. Jeżeli macierze ze zbioru $\Sigma = \{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ komutują i zachodzi:

$$\rho\left(e^{A_1\tau_1}\right) \cdot \rho\left(e^{A_2\tau_2}\right) \cdot \ldots \cdot \rho\left(e^{A_k\tau_k}\right) < 1 \tag{33}$$

to układ (26) jest asymptotycznie stabilny.

4. Przykład numeryczny

Przykład 1. Rozpatrzmy układ jednowymiarowy (8) przełączający się między dwoma stanami $\sigma = \{a_1, a_2\}$, gdzie średni czas przebywania w danym stanie wynosi τ_1, τ_2. Wyniki działania układu przełączającego się między dodatnimi (D) i ujemnymi (U) współczynnikami dla różnych τ_1, τ_2 przedstawia tabela 1. O stabilności (S) lub też niestabilności (N) całego układu decyduje znak oraz wartość stanu, ale także czas przebywania w tym stanie.

Przykład 2. Rozpatrzmy teraz przypadek opisany równaniem (26). Układ przełącza się między dwoma stanami $\Sigma = \{A, B\}$ opisanymi przez macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ oraz $B = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/10 \end{bmatrix}$, promień spektralny wynosi odpowiednio $\rho(A) = 2$ i $\rho(B) = 1/5$. Dodatkowo macierze te komutują $AB = BA = \begin{bmatrix} 1/5 & 0 \\ 0 & 1/5 \end{bmatrix}$.

Z warunku na stabilność wynika:

$$\begin{aligned} &\rho\left(e^{A\tau_1}\right) \cdot \rho\left(e^{B\tau_2}\right) < 1 \\ &e^{2\tau_1} \cdot e^{1/5\,\tau_2} < 1 \end{aligned} . \tag{34}$$

Po zlogarytmowaniu otrzymujemy $2\tau_1 + 1/5\,\tau_2 < 0$. Ponieważ czasy τ_1, τ_2 są wielkościami dodatnimi nierówność (34) nie jest spełniona, co oznacza, że układ zbudowany z macierzy *A, B* nie jest asymptotycznie stabilny.

Tab. 1. Wyniki działania układu ciągłego o zmiennych skokowo współczynnikach
Tab. 1. Results for continuous time-varying system

a_1	czy a_1 stabilne	a_2	czy a_2 stabilne	τ_1	τ_2	czy spełnione $a_1\tau_1 + a_2\tau_2 < 0$		S/N układ
-2	U	-2	U	1	2	-6/3	tak	S
–	U	–	U	–	–	–		N
-1	U	7	D	10	4	18/14	nie	N
-2	U	1	D	10	4	-16/14	tak	S
-2	U	1	D	4	10	2/14	nie	N
7	D	-1	U	4	10	18/14	nie	N
2	D	-1	U	4	10	-2/14	tak	S
2	D	-1	U	10	4	16/14	nie	N
–	D	–	D	–	–	–		S
2	D	3	D	1	2	8/3	nie	N

5. Wnioski

Wyprowadzone warunki stabilności dla układów o zmiennych skokowo współczynnikach są bardziej złożone niż dla układów stacjonarnych. Już dla tak prostego układu ciągłego, pokazanego w przykładzie 1, gdzie układ przełącza się tylko między dwoma stanami będącymi skalarami o stabilności całego układu decydują stabilności/niestabilności poszczególnych podukładów. Dlatego też wyznaczenie stabilności układów z przełączeniami staje się zadaniem trudnym i złożonym. Zwiększenie jedynie liczby stanów przełączeń dla przypadku jednowymiarowego powoduje zwiększenie liczby rozpatrywanych przypadków przez co znacznie komplikuje zadanie oraz zwiększa nakłady obliczeniowe. W tabeli 1 kolorem szarym wyróżnione zostały wiersze, przedstawiające sytuacje, które w układach skalarnych nie wystąpią, natomiast w układach wielowymiarowych, ze względu na fakt że stany są nie skalarami a macierzami, zaznaczone przypadki są jak najbardziej możliwe do osiągnięcia.

Dodatkowo wyprowadzone warunki stabilności dla układów ciągłych jednowymiarowych posłużyły do uogólniania i wyprowadzenia warunków stabilności dla układów wielowymiarowych. W oparciu o dodatkowe twierdzenia wyprowadzony został warunek stabilności układów wielowymiarowych wykorzystujący podstawowe informacje o macierzach takie jak: wartości własne czy promień spektralny, przez to warunki te są proste i bardzo przydatne do określenia stabilności, a szybkość korzystania z nich pokazana została w przykładzie 2. Warunki te są coraz to bardziej złożone, jednak pozwalają na określenie stabilności układów (1).

6. Literatura

[1] B.P. Demidowicz: Matematyczna teoria stabilności. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne WNT, W-wa 1972.

[2] T. Kaczorek, A. Dzieliński, W. Dąbrowski, R. Łopatka: Podstawy teorii sterowania. Wydawnictwo Naukowo-Techniczne WNT, W-wa 2005.

[3] T. Kaczorek: Teoria sterowania i systemów. Wydawnictwo Naukowe PWN, wydanie 3, W-wa 1999.

[4] A.M. Lyapunov: Stability of motion. Academic Press, New York and London, 1966.

Artykuł recenzowany