

Elżbieta KAWECKA¹, Sergiusz SIENKOWSKI²

¹ UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT INFORMATYKI I ELEKTRONIKI

² UNIWERSYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT METROLOGII ELEKTRYCZNEJ

Estymacja punktowa funkcji autokorelacji sygnałów na podstawie cyfrowych danych pomiarowych

Dr inż. Elżbieta KAWECKA

Absolwentka Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2000r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się następującymi zagadnieniami: estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, przetwarzanie A/C z sygnałem ditherowym, niepewność pomiaru, technika korelacyjna.

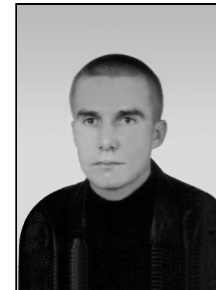
e-mail: e.kawecka@iie.uz.zgora.pl



Mgr inż. Sergiusz SIENKOWSKI

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003r.). Obecnie asystent w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.

e-mail: s.sienkowski@ime.uz.zgora.pl



Streszczenie

Artykuł przedstawia problematykę obliczania wartości oczekiwanej, obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora funkcji autokorelacji sygnałów. Pokazano, że estymator funkcji autokorelacji nie jest zgodny oraz, że jest obciążony dodatkową, wynikającą z kwantowania składową. Pokazano, że funkcja gęstości kompensuje przesunięcie funkcji autokorelacji, co oznacza, że określenie na podstawie momentów obciążenia i wariancji estymatora możliwe jest jedynie w tych punktach funkcji autokorelacji, które odpowiadają wartości średniokwadratowej sygnału. Przedstawiono wyniki oszacowań obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora funkcji autokorelacji dla wybranych klas sygnałów. Do obliczeń zastosowano opracowany na potrzeby prowadzonych badań wielobitowy wirtualny korelator sygnałów.

Słowa kluczowe: cyfrowy estymator funkcji autokorelacji, wartość oczekiwana, obciążenie, wariancja estymatora

Point estimation of signal autocorrelation function basing on digital measurement data

Abstract

In the paper there are discussed problems of estimation of expected value, bias and variance of digital estimator of signals autocorrelation function. It is shown that the autocorrelation function estimator is not consistent. It is shown as well that density function compensates the delay of autocorrelation function. This means that determination of bias and variance of estimator basing on so-called moments is possible only in these points of autocorrelation functions which are the mean square value of signal. There are presented results of estimation of bias and variance of autocorrelation function digital estimator for selected class of signals. To perform calculations there was designed dedicated multi-bit virtual correlator of signals. The paper is divided into 3 chapters. In chapter 1 we give a short introduction to the issues of this paper. In chapter 2 there are presented definitions of autocorrelation function, autocorrelation function estimator of signal and quantized signal - Eq. (2-4). Next we calculated an expected value of the estimator - Eq. (5, 6). There was calculated bias of autocorrelation function digital estimator caused by quantization Eq. (7). In the next part of paper there is shown that the signal distribution density function compensates delay of autocorrelation function - Eq. (11). Next we calculated mean square error of the estimator - Eq. (20). Mean square error and variance from Eq. (17) allowed to evaluate of the estimator consistency. Table 1 presents results of analysis of bias and variance of autocorrelation function digital estimator for sinusoidal signal with noise. There were analyzed following noise types: Gaussian, uniform probability density function (PDF) and triangular PDF signal. In chapter 3 research results are summarized. Obtained results proved importance of research on autocorrelation function degradation caused by quantization.

Keywords: autocorrelation function digital estimator, expected value, bias, variance of autocorrelation function

1. Wstęp

Funkcje korelacyjne stanowią istotne i ważne narzędzie analizy sygnałów. Znajdują one zastosowanie w wielu dziedzinach nauki i techniki: radioastronomii, medycynie, technice radarowej, pomiarze prędkości, czy opóźnień transportowych. Wśród funkcji korelacyjnych wyróżnić można funkcję autokorelacji. Za pomocą funkcji autokorelacji wyznaczać można tory pomiarowe sygnałów, mierzyć czasy opóźnień oraz wykrywać i odtwarzać sygnały w szumie. Podstawową i najważniejszą zaletą funkcji autokorelacji jest możliwość uzyskiwania na jej podstawie widmowej gęstości mocy opisującej ogólną strukturę częstotliwościową sygnałów. Taka struktura pozwala na zdobywanie informacji o zasadniczych charakterystykach badanych układów fizycznych. Funkcje widmowej gęstości mocy i autokorelacji związane są przekształceniem Fouriera [1]. Przekształcenie takie jest powszechnie i chętnie stosowane w cyfrowym przetwarzaniu sygnałów. Realizacjami gęstości widmowej mocy są widma mocy. Widma takie stosuje się do przeprowadzania analizy spektralnej sygnałów.

Funkcje autokorelacji uzyskuje się za pomocą korelatorów [2,3,4]. Najczęściej stosowane korelatory to urządzenia nie bezpodstawnie wyposażone w przetworniki A/C o niskiej rozdzielczości. Niska rozdzielczość przetwornika powoduje zauważalną degradację funkcji autokorelacji sygnału. Autorów artykułu interesuje badanie wpływu kwantowania oraz zakłóceń na dokładność pomiaru funkcji autokorelacji.

W artykule analizowane są nie tylko podstawowe własności cyfrowego estymatora funkcji autokorelacji. Oprócz określenia obciążenia i zgodności estymatora, wyznaczona została również jego teoretyczna wariancja. Planowane jest zastosowanie takiej wariancji do przeprowadzenia analizy niepewności wyniku pomiaru funkcji autokorelacji.

2. Wartość oczekiwana, obciążenie i wariancja cyfrowego estymatora funkcji autokorelacji sygnałów

Przyjmijmy, że przetwornik A/C jest idealny w swoim działaniu i wszystkie możliwe błędy w przedziale od $-q/2$ do $q/2$ (q – krok kwantyzacji) będą równie prawdopodobne [5]. Ponadto niech funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantyzacji e_q będzie jednostajna, przy czym:

$$e_q = x_q - x, \quad (1)$$

gdzie x – sygnał pierwotny, x_q – sygnał skwantowany.

Zdefiniujmy pojęcia dokładnej funkcji autokorelacji $R_x(\tau)$ sygnału x oraz estymatorów funkcji autokorelacji $\tilde{R}_x(k)$ sygnału x i $\tilde{R}_{x_q}(k)$ skwantowanego sygnału x_q :

$$R_x(\tau) = E[x(t)x(t+\tau)], \quad (2)$$

$$\tilde{R}_x(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x(i)x(i+k), \quad (3)$$

$$\tilde{R}_{x_q}(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i)x_q(i+k), \quad (4)$$

gdzie M to liczba próbek, $\tau \in \mathfrak{R}$ to przesunięcie funkcji autokorelacji $R_x(\tau)$, $k = 0, 1, \dots, M-1$ to przesunięcie estymatorów funkcji autokorelacji $\tilde{R}_x(k)$ i $\tilde{R}_{x_q}(k)$.

W celu określenia obciążenia estymatora $\tilde{R}_{x_q}(k)$ należy w pierwszej kolejności wyznaczyć wartość oczekiwaną estymatora $\tilde{R}_x(k)$:

$$E[\tilde{R}_x(k)] = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x(i)x(i+k)] = \frac{1}{M} (M R_x(k)) = R_x(k). \quad (5)$$

Zwróćmy uwagę, że wartość oczekiwana estymatora $\tilde{R}_x(k)$ jest dla $\tau = k$ równa dokładnej funkcji autokorelacji $R_x(\tau)$. Zatem estymator $\tilde{R}_x(k)$ jest nieobciążony.

Pamiętając, że $\tilde{R}_x(k)$ jest nieobciążony i korzystając z definicji błędu kwantyzacji (1), można obliczyć wartość oczekiwaną estymatora $\tilde{R}_{x_q}(k)$ [6]:

$$\begin{aligned} E[\tilde{R}_{x_q}(k)] &= R_x(k) + \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x(i)e_q(i+k)] + \\ &+ \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x(i+k)e_q(i)] + \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[e_q(i)e_q(i+k)]. \end{aligned} \quad (6)$$

Wartość oczekiwana estymatora $\tilde{R}_{x_q}(k)$ jest dla $\tau = k$ różna od prawdziwej funkcji autokorelacji $R_x(\tau)$. Zatem estymator $\tilde{R}_{x_q}(k)$ jest obciążony dodatkową, wynikającą z kwantowania składową. Można opisać ją wzorem:

$$\begin{aligned} b_{\tilde{R}_{x_q}(k)} &= \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x(i)e_q(i+k)] + \\ &+ \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x(i+k)e_q(i)] + \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[e_q(i)e_q(i+k)]. \end{aligned} \quad (7)$$

Wyrażenie ze wzoru (7) można obliczyć na podstawie momentów sygnału x oraz teorii kwantowania Widrowa [7]. Momenty sygnału x wyznaczamy na podstawie odpowiadającej temu sygnałowi funkcji charakterystycznej $\Phi_x(v) = E[e^{jvx}]$ [8].

Można wykazać, że funkcja charakterystyczna odpowiadająca sygnałowi x kompensuje przesunięcie τ funkcji autokorelacji. Jeżeli dana będzie pewna zmienna losowa o gęstości $g(t)$ oraz mająca ciągłą pochodną, różnowartościowa funkcja $x = f(t)$, $t \in \mathfrak{R}$ opisująca przebieg sygnału x , to nowa zmienna losowa, powstała po przekształceniu pierwotnej zmiennej losowej, ma gęstość [8]:

$$p(x) = g(t) \left| \frac{dt}{dx} \right|. \quad (8)$$

Funkcja gęstości $p(x)$ odpowiada sygnałowi x . Uwzględniając w $x = f(t)$ przesunięcie τ funkcji autokorelacji wyznaczamy funkcję odwrotną do obwiedni sygnału:

$$x = f(t + \tau) \Rightarrow t = f^{-1}(x) - \tau. \quad (9)$$

Łatwo zauważyć, że:

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d}{dx} f^{-1}(x). \quad (10)$$

Stąd:

$$p(x) = g(t) \left| \frac{d}{dx} f^{-1}(x) \right|. \quad (11)$$

Zatem funkcja $p(x)$ skompensowała przesunięcie τ funkcji autokorelacji. Ponieważ funkcja charakterystyczna $\Phi_x(v)$ obliczana jest jako transformata Fouriera funkcji gęstości $p(x)$, to $\Phi_x(v)$ również kompensuje przesunięcie τ .

Zgodnie z przedstawionymi powyżej wzorami funkcja autokorelacji sygnału może być obliczana na podstawie momentów, ale tylko w tych punktach, w których wartość funkcji autokorelacji odpowiadać będzie momentowi drugiego rzędu sygnału x . W technice moment drugiego rzędu nazywany jest często wartością średniokwadratową sygnału.

Rozważmy przypadek szczególny dla przesunięcia $k = 0$ funkcji autokorelacji. Obciążenie estymatora $\tilde{R}_{x_q}(k)$ przyjmuje wówczas postać wzoru:

$$\begin{aligned} b_{\tilde{R}_{x_q}(0)} &= \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x(i)e_q(i)] + \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[e_q^2(i)] = \\ &= 2E[xe_q] + E[e_q^2]. \end{aligned} \quad (12)$$

Składniki wzoru (12) można obliczyć na podstawie teorii kwantowania Widrowa w następujący sposób [7]:

$$E[xe_q] = \frac{q}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{d}{dv} \Phi_x(v) \bigg|_{v=\frac{2\pi i}{q}} \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \quad (13)$$

$$E[e_q^2] = \frac{q^2}{\pi^2} \sum_{i=1}^{\infty} \Phi_x\left(\frac{2\pi i}{q}\right) \frac{(-1)^i}{i^2} + \frac{q^2}{12}. \quad (14)$$

Wariancję estymatora $\tilde{R}_{x_q}(k)$ można obliczyć z definicji na podstawie wzoru:

$$\text{Var}[\tilde{R}_{x_q}(k)] = E[(\tilde{R}_{x_q}(k))^2] - E^2[\tilde{R}_{x_q}(k)]. \quad (15)$$

Zwróćmy uwagę, że:

$$(\tilde{R}_{x_q}(k))^2 = \frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} x_q(i)x_q(i+k)x_q(j)x_q(j+k). \quad (16)$$

Stąd [6]:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{R}_{x_q}(k)] &= \frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} E[x_q(i)x_q(i+k)x_q(j)x_q(j+k)] - \\ &- \frac{1}{M^2} \left(\sum_{i=0}^{M-1} E[x_q(i)x_q(i+k)] \right)^2. \end{aligned} \quad (17)$$

Przyjmując wartość przesunięcia funkcji autokorelacji $k = 0$, można obliczyć $\text{Var}[\tilde{R}_{x_q}(k)]$ na podstawie momentów sygnału. Zgodnie ze wzorem (17) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{R}_{x_q}(0)] &= \frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{M-1} E[x_q^2(i)x_q^2(j)] - \\ &- \frac{1}{M^2} \left(\sum_{i=0}^{M-1} E[x_q^2(i)] \right)^2 = \frac{1}{M} (E[x_q^4] - E^2[x_q^2]). \end{aligned} \quad (18)$$

Można kontynuować powyższe wyprowadzenia. Korzystając z definicji błędu kwantyzacji e_q otrzymujemy:

$$\text{Var}[\tilde{R}_{x_q}(0)] = \frac{1}{M} (E[(x + e_q)^4] - E^2[(x + e_q)^2]). \quad (19)$$

Błąd średniokwadratowy $\Delta_{\tilde{R}_{x_q}(k)}$ estymatora $\tilde{R}_{x_q}(k)$ jest równy:

$$\Delta_{\tilde{R}_{x_q}(k)} = \text{Var}[\tilde{R}_{x_q}(k)] + b_{\tilde{R}_{x_q}(k)}^2. \quad (20)$$

Pamiętamy, że $b_{\tilde{R}_{x_q}(k)} \neq 0$. Oznacza to, że błąd średniokwadratowy i wariancja estymatora $\tilde{R}_{x_q}(k)$ nie są sobie równe. Zatem

pomimo tego, że dla $M \rightarrow \infty$ wariancja $\text{Var}[\tilde{R}_{x_q}(k)] = 0$, to badany estymator nie jest zgodny. Jeżeli sygnał x kwantowany byłby w przetworniku A/C o nieskończenie dużej rozdzielczości, to funkcja autokorelacji $\tilde{R}_{x_q}(k)$ zmierzałaby stochastycznie do prawdziwej funkcji autokorelacji $R_x(\tau)$.

Obciążenie i wariancję ze wzorów (7) i (17) można oszacować na podstawie skwantowanych próbek sygnału i wzorów zamieszczonych w pracach [2] i [3]. W tab. 1. przedstawiono wyniki oszacowań obciążenia i wariancji estymatora funkcji autokorelacji sygnału sinusoidalnego o amplitudzie A i częstotliwości f . Kwantowany sygnał zakłócano sygnałami losowymi o rozkładach: gaussowskim, równomiernym i trójkątnym. Do obliczeń zastosowano opracowany na potrzeby prowadzonych badań wirtualny korelator sygnałów [2, 3]. Parametry przetwarzania dobierano tak, aby nie przekroczyć zakresu pomiarowego przetwornika A/C. Funkcję autokorelacji badano w punktach: $k = 0; 0.125T; 0.375T; 0.5T; T$, gdzie T jest okresem sygnału sinusoidalnego. Zastosowano 3-bitowy przetwornik A/C. Ponadto przyjęto $A = 5V$, $f = 1kHz$, $M = 10\,000$, liczbę powtórzeń eksperymentu $N = 10\,000$.

Tab. 1. Obciążenie i wariancja cyfrowego estymatora funkcji autokorelacji badanych sygnałów (Sin – sygnał sinusoidalny, sygnał losowy o rozkładzie: G – gaussowskim, R – równomiernym, T – trójkątnym)

Tab. 1. Bias and variance of autocorrelation function digital estimator (Sin – sinusoidal signal, G – Gaussian signal, R – uniform PDF signal, T – triangular PDF signal)

k	Sin	Sin+G		Sin+R		Sin+T	
	$\tilde{b}_{\tilde{R}_{x_q}(k)} = \tilde{b} \cdot 10^{-3} \text{ V}^2, \tilde{Var}[\tilde{R}_{x_q}(k)] = \tilde{Var} \cdot 10^{-3} \text{ V}^4$						
	-	$\sigma_G = 1 \text{ V}$		$A_R = \sqrt{3} \text{ V}$		$A_T = \sqrt{6} \text{ V}$	
	$\tilde{b}$	$\tilde{b}$	$\tilde{Var}$	$\tilde{b}$	$\tilde{Var}$	$\tilde{b}$	$\tilde{Var}$
0	323	-0.266	7.17	41.5	6.66	16.4	6.84
$\frac{1}{8}T$	256	-2.70	3.72	11.3	3.58	16.5	3.65
$\frac{3}{8}T$	-256	2.91	3.27	-11.6	3.06	-16.9	3.16
$\frac{1}{2}T$	-453	4.38	5.17	-17.0	4.99	-23.6	5.03
T	453	-3.78	3.48	17.6	3.36	22.7	3.33

Korelator 3-bitowy daje w wyniku zauważalne wartości obciążenia estymatora funkcji autokorelacji (tab. 1). Interesujące jest, że po pojawieniu się w użytecznym sygnale silnego zakłócenia obciążenie wcale nie rośnie, ale jest efektywnie tłumione. Korelator uśrednia sygnał zakłócający i kompensuje błędy wynikające z kwantowania. Można spodziewać się, że w widmie mocy sygnału nastąpi obserwowalny zanik składowych pochodzących od błędów kwantyzacji i od sygnału zakłócającego.

Podczas przeprowadzania eksperymentu generowano sygnały losowe o zbliżonej mocy [9]. Na tej podstawie można dokonać porównania wpływu zakłócenia na wartość obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora funkcji korelacji. W tym względzie zauważalna redukcja obciążenia nastąpiła po pojawieniu się w użytecznym sygnale zakłócenia w postaci sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim (rzęd $10^{-3} V^2$). Pozostałe sygnały losowe dały większe oszacowania wartości obciążenia (rzęd $10^{-2} V^2$). Bez względu na zastosowane zakłócenie fluktuacje wariancji estymatora utrzymywały się na stałym poziomie i przyjmowały wartości rzędu $10^{-3} V^4$.

3. Wnioski

W artykule przedstawiono postać cyfrowego estymatora funkcji autokorelacji sygnału. Pokazano, że badany estymator obciążony jest dodatkową, wynikającą z kwantowania składową. Obliczając teoretyczną wariancję i błąd średniokwadratowy estymatora sprawdzono jego zgodność. Prowadzone rozważania pokazały, że cyfrowy estymator funkcji autokorelacji nie jest zgodny. Wykazano, że funkcja gęstości kompensuje przesunięcie funkcji autokorelacji. W takim przypadku określenie, na podstawie momentów, obciążenia i wariancji estymatora możliwe jest jedynie w tych punktach funkcji autokorelacji, które odpowiadają wartości średniokwadratowej sygnału.

Badania eksperymentalne pokazały, że funkcja autokorelacji sama nie oddziałuje na błędy wynikające z kwantowania. Jeżeli jednak w użytecznym sygnale pojawi się zakłócenie, to funkcja autokorelacji może nie tylko skutecznie je eliminować, ale poprzez wykonanie operacji uśrednienia potrafi efektywnie zmniejszać wartości błędów powodowanych kwantowaniem.

Uzyskiwane z zastosowaniem bardzo szybkich kilkubitowych korelatorów estymatory funkcji autokorelacji stosuje się z powodzeniem do wyznaczania widm mocy sygnałów. Widma mocy w dziedzinie analizy spektralnej są obecnie podstawowym materiałem badawczym m.in. astronomów. Badanie powodowanej kwantowaniem znaczącej degradacji funkcji autokorelacji jest zatem szczególnie ważne i zdaniem autorów artykułu ciągle nie traci na swojej aktualności.

4. Literatura

- [1] Bendat J.S., Pierrsol A.G., Metody analizy i pomiaru sygnałów losowych, PWN, 1976.
- [2] Lal-Jadziak J., Kawecka E.: Ocena dokładności estymacji funkcji korelacyjnych z użyciem modelu wirtualnego korelatora, PAK, 6 (2006), 16-18.
- [3] Kawecka E.: Oddziaływanie na dokładność cyfrowych pomiarów korelacyjnych, Uniwersytet Zielonogórski, Instytut Informatyki i Elektroniki, Zielona Góra, 2008.
- [4] <http://www.astro.uni.torun.pl/~kb/HandbRT32/HandbookRT32.htm>
- [5] Lyons R.G.: Understanding Digital Signal Processing, Prentice Hall PTR, 2004.
- [6] Lal-Jadziak J.: Accuracy in determination of correlation functions by digital methods, Metrology and Measurement System, 8 (2001), 153-164.
- [7] Widrow B., Kollar I.: Quantization Noise, Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications, Cambridge University Press, 2008.
- [8] Papoulis A.: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes., New York: McGraw-Hill, 1965.
- [9] Wagdy M.F.: Linearizing Average Transfer Characteristics of ideal ADC's via Analog and Digital Dither, IEEE Trans. on Instrum. and Measurement, 43 (2) (1994), 146-150.