

Sergiusz SIENKOWSKI¹, Elżbieta KAWECKA²

¹ UNIwersYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT METROLOGII ELEKTRYCZNEJ

² UNIwersYTET ZIELONOGÓRSKI, INSTYTUT INFORMATYKI I ELEKTRONIKI

Estymacja punktowa cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów przypadkowych

Mgr inż. Sergiusz SIENKOWSKI

Absolwent Wydziału Podstawowych Problemów Techniki Politechniki Zielonogórskiej (2001r.) oraz Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2003r.). Obecnie asystent w Instytucie Metrologii Elektrycznej Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się zagadnieniami związanymi z cyfrowym przetwarzaniem sygnałów i oceną niepewności pomiarów.

e-mail: s.sienkowski@ime.uz.zgora.pl



Dr inż. Elżbieta KAWECKA

Absolwentka Wydziału Elektrotechniki, Informatyki i Telekomunikacji Uniwersytetu Zielonogórskiego (2000r.). Obecnie adiunkt w Instytucie Informatyki i Elektroniki Uniwersytetu Zielonogórskiego. Zajmuje się następującymi zagadnieniami: estymacja charakterystyk sygnału na podstawie jego cyfrowej reprezentacji, przetwarzanie A/C z sygnałem ditherowym, niepewność pomiaru, technika korelacyjna.

e-mail: e.kaweka@iie.uz.zgora.pl



Streszczenie

Artykuł przedstawia problematykę obliczania wartości oczekiwanej, obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów przypadkowych. W rzeczywistych sytuacjach pomiarowych estymacja obciążenia i wariancji, wymaga najczęściej wielokrotnego powtarzania eksperymentu pomiarowego. Nie są przy tym sformułowane kryteria dotyczące dokładności prowadzonych oszacowań. Zaprezentowane w pracy wzory omijają problem niejednoznaczności oszacowań i umożliwiają, na podstawie momentów, obliczenie obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów.

Słowa kluczowe: cyfrowy estymator wartości średniej, wartość oczekiwana, obciążenie, wariancja estymatora

Point estimation of mean value digital estimator of random signals

Abstract

In the paper there is discussed problem of estimation of expected value, bias and variance of mean value digital estimator of random signals. In real measurement tasks the estimation of variance and bias values requires numerous repetitions of measurement experiments. Moreover there are no clear criterions of estimation accuracy. Equations formulated in this paper allow to pass over the estimation uncertainty problem and allow to calculate bias and variance of digital estimator of mean value signals basing on so called moments. The paper is divided into 4 chapters. In chapter 1 we give a short introduction to the issues of this paper. In chapter 2 there is given definition of digital estimator of mean value signal. Expected value of the estimator is calculated – Eq. (2). On the basis of Eq. (2) the bias caused by quantization is given by Eq. (4). The variance Eq. (7) and mean square error Eq. (8) was given as well. This allowed to evaluate the consistency estimator. The variance of the mean value Eq. (13) was given, basing on the Widrow theory of quantization Eq. (10-12). In the next chapter there was presented an example of determining the bias – Eq. (17) and variance Eq. (20) of mean value digital estimator of Gaussian signal. The characteristic function of the Gaussian signal is given by Eq. (15). Table 1. presents result of calculations of mean value variance for varying signal amplitude and increasing A/D resolution. Chapter 4 summarizes research that resulted in presented equations. There are discussed potential applications of obtained expressions, applying to evaluation of measurement result uncertainty of the most important signal parameters.

Keywords: mean value digital estimator, expected value, bias, variance of mean value

1. Wstęp

Pojęcie estymacji jest równoznaczne z pojęciem oceny lub oszacowania. Do oszacowywania ciągu wartości stosuje się trzy miary statystyczne. Są to wartość średnia, wariancja i odchylenie standardowe. Obliczenie wartości średniej ma znaczenie, z co najmniej trzech podstawowych powodów. Po pierwsze

wartość średnia stanowi podstawową miarę tendencji i rozrzutu zmiennej losowej, jej obliczanie wymagane jest w najbardziej podstawowych zastosowaniach. Po drugie parametr ten może być podstawą do oceny stacjonarności sygnału. Po trzecie wartość średnia może być uzyskana w sposób pośredni z innych parametrów sygnałów [1]. Obliczanie wariancji ma niebagatelne znaczenie w procesie badania własności sygnałów. Za pomocą wariancji badać można zgodność estymatorów, mierzyć skutki błędów kwantyzacji i użyteczność algorytmów uśredniania sygnału. Wariancja utożsamiana ze zróżnicowaniem zbiorowości daje pojęcie, w jakim zakresie wartości skupione w ciągu fluktuują wokół wartości średniej ciągu i dostarcza dobrze zdefiniowanej miary ilościowej tych fluktuacji [2]. Obliczając pierwiastek kwadratowy z wariancji otrzymujemy odchylenie standardowe. W metrologii odchylenie standardowe stosuje się do określenia innej ważnej wielkości nazywanej niepewnością pomiaru [3].

W artykule przedstawiono zależność matematyczną umożliwiającą obliczenie wartości średniej sygnału losowego skwantowanego w przetworniku A/C typu zaokrąglającego o idealnej charakterystyce kwantowania. Obliczono wartość oczekiwaną tak zdefiniowanego estymatora. Następnie wyznaczono jego obciążenie i wariancję. Na podstawie wariancji i błędu średniokwadratowego estymatora oceniono jego zgodność. W charakterze przykładu zaprezentowano wyniki obliczeń obciążenia i wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim.

2. Wartość oczekiwana, obciążenie i wariancja cyfrowego estymatora wartości średniej sygnałów przypadkowych

Niech przetwornik A/C będzie idealny w swoim działaniu i wszystkie możliwe błędy pomiędzy $-q/2$ a $q/2$ (q – krok kwantowania) będą równie prawdopodobne. Ponadto niech funkcja gęstości prawdopodobieństwa błędu kwantyzacji e_q będzie jednostajna, przy czym:

$$e_q = n_q - n, \quad (1)$$

gdzie n – sygnał pierwotny, n_q – sygnał skwantowany.

Estymator $\tilde{n}_q$ prawdziwej wartości średniej μ można oszacować na podstawie skwantowanych i nieskorelowanych próbek sygnału n_q zgodnie ze wzorem:

$$\tilde{n}_q = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} n_q(i), \quad (2)$$

gdzie M to liczba próbek sygnału.

Estymator $\tilde{n}_q$ można rozumieć jako statystykę zmiennych losowych odpowiadających poszczególnym próbkom sygnału n_q . Takie zmienne mają jednakowy rozkład prawdopodobieństwa, identyczny z rozkładem całej populacji. Statystyka $\tilde{n}_q$ sama też jest zmienną losową. To ważne spostrzeżenie pozwala na obliczenie wartości oczekiwanej estymatora ze wzoru (2).

Korzystając z definicji błędu kwantyzacji e_q otrzymujemy:

$$\begin{aligned} E[\tilde{n}_q] &= E\left[\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} n_q(i)\right] = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[n_q(i)] = \\ &= \frac{1}{M} (M E[n_q]) = E[n] + E[e_q] = \mu + E[e_q]. \end{aligned} \quad (3)$$

Jak wynika ze wzoru (3) estymator $\tilde{n}_q$ jest obciążony dodatnią, wynikającą z kwantowania składową, równą $E[e_q]$. Ponieważ wpływ próbkowania jest pomijany jedynym źródłem błędu jest sytuacja, w której $E[e_q] \neq 0$. Błąd ten można opisać wzorem [4]:

$$b_{\tilde{n}_q} = E[e_q]. \quad (4)$$

Wariancję estymatora $\tilde{n}_q$ można obliczyć z definicji na podstawie wzoru:

$$\text{Var}[\tilde{n}_q] = E\left[\left(\tilde{n}_q - E[\tilde{n}_q]\right)^2\right] = E\left[\left(\tilde{n}_q\right)^2\right] - E^2[\tilde{n}_q]. \quad (5)$$

Można zauważyć, że:

$$\begin{aligned} E\left[\left(\tilde{n}_q\right)^2\right] &= E\left[\left(\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} n_q(i)\right)^2\right] = \\ &= \frac{1}{M^2} \left(\sum_{i=0}^{M-1} E\left[n_q(i)^2\right] + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{j=0 \\ i \neq j}}^{M-1} E\left[n_q(i)n_q(j)\right] \right) = \\ &= \frac{1}{M^2} (ME[n_q^2] + M(M-1)E^2[n_q]) = \\ &= \frac{1}{M} (E[n_q^2] - E^2[n_q]) + E^2[n_q]. \end{aligned} \quad (6)$$

Uwzględniając zależności (3) i (6) we wzorze (5) otrzymujemy:

$$\text{Var}[\tilde{n}_q] = \frac{1}{M} (E[n_q^2] - E^2[n_q]). \quad (7)$$

Korzystając ze wzorów (3) i (6) można obliczyć błąd średniokwadratowy $\Delta_{\tilde{n}_q}^2$ estymatora $\tilde{n}_q$:

$$\begin{aligned} \Delta_{\tilde{n}_q}^2 &= E\left[\left(\tilde{n}_q - \mu\right)^2\right] = E\left[\left(\tilde{n}_q - E[n]\right)^2\right] = \\ &= E\left[\left(\tilde{n}_q\right)^2\right] - E^2[n] - 2E[n]E[\tilde{n}_q] = \\ &= \frac{1}{M} (E[n_q^2] - E^2[n_q]) + E^2[e_q]. \end{aligned} \quad (8)$$

Wariancja $\text{Var}[\tilde{n}_q]$ i błąd średniokwadratowy $\Delta_{\tilde{n}_q}^2$ są różne.

Pomimo, że dla rosnącej liczby próbek M wariancja ze wzoru (7) szybko maleje i dla $M \rightarrow \infty$ przyjmuje wartość równą zero, to $\tilde{n}_q$ nie jest estymatorem zgodnym. Jeżeli sygnał n kwantowany byłby w przetworniku o nieskończenie dużej

rozdzielczości B to estymator $\tilde{n}_q$ zdołałby stochastycznie do prawdziwej wartości średniej μ .

Uwzględniając definicję błędu kwantyzacji e_q we wzorze (7) otrzymujemy:

$$\text{Var}[\tilde{n}_q] = \frac{1}{M} (E[n^2] + 2E[ne_q] + E[e_q^2] - (E[n] + E[e_q])^2). \quad (9)$$

Momenty pierwszego i drugiego rzędu błędu kwantyzacji e_q oraz wyrażenie korelacyjne wiążące sygnał n i błąd kwantyzacji e_q można obliczyć na podstawie wzorów [4]:

$$E[e_q] = \frac{q}{j2\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^i}{i}, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (10)$$

$$E[e_q^2] = \frac{q^2}{2\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^i}{i^2} + \frac{q^2}{12}, \quad (11)$$

$$E[ne_q] = \frac{q}{2\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \frac{(-1)^{i+1}}{i}, \quad (12)$$

gdzie $\Phi_n(v) = E[e^{jvn}]$ jest funkcją charakterystyczną odpowiadającą sygnałowi n [5, 6].

Wyrażenia $E[n]$ i $E[n^2]$ to momenty zwykłe pierwszego i drugiego rzędu. W technice nazywane są one odpowiednio wartością średnią i średniokwadratową sygnału n .

Uwzględniając wzory (10)-(12) we wzorze (9) otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{n}_q] &= \frac{1}{M} \left(E[n^2] + \frac{q^2}{12} - E^2[n] + \right. \\ &+ \frac{q}{\pi} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \left(\Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \left(\frac{q}{2\pi i} + jE[n] \right) - \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \right) + \\ &+ \left. \frac{q^2}{4\pi^2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}k\right) \frac{(-1)^{i+k}}{ik} \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Jeżeli sygnał n ma zerową wartość średnią μ i odpowiada mu symetryczna funkcja charakterystyczna Φ_n to:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{n}_q] &= \frac{1}{M} (E[n^2] + 2E[ne_q] + E[e_q^2]) = \\ &= \frac{1}{M} \left(E[n^2] + \frac{q^2}{12} + \right. \\ &+ \left. \frac{q}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} \left(\frac{q}{\pi i} \Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) - 2\Phi_n\left(\frac{2\pi}{q}i\right) \right) \right). \end{aligned} \quad (14)$$

Na podstawie wzoru (13) i funkcji charakterystycznej Φ_n odpowiadającej badanemu sygnałowi można obliczyć wariancję estymatora wartości średniej skwantowanego sygnału.

3. Przykład

W charakterze przykładu rozważmy sygnał losowy n o rozkładzie gaussowskim i odchyleniu standardowym σ_n . Sygnał n poddano konwersji A/C w przetworniku o rozdzielczości B .

Badanemu sygnałowi odpowiada funkcja charakterystyczna postaci [5, 6]:

$$\Phi_n(v) = e^{jv\mu} e^{-0.5v^2\sigma_n^2}. \quad (15)$$

Na podstawie (15) otrzymujemy pochodną funkcji Φ_n :

$$\dot{\Phi}_n(v) = (-v\sigma_n^2 + j\mu)\Phi_n(v). \quad (16)$$

Przyjmuje się w ogólności, że sygnał losowy n o rozkładzie gaussowskim jest sygnałem o zerowej wartości średniej μ . Ponieważ funkcja Φ_n ze wzoru (15) jest symetryczna względem zerowej wartości średniej μ to na podstawie (4) i (10) otrzymujemy, że:

$$b_{\tilde{n}_q} = E[e_q] = 0. \quad (17)$$

Wynikające z kwantowania obciążenie $b_{\tilde{n}_q}$ jest równe zero, a zatem estymator $\tilde{n}_q$ wartości średniej badanego sygnału jest nieobciążony.

Kolejne momenty sygnału losowego n o rozkładzie gaussowskim można obliczyć ze wzorów [4]:

$$\begin{aligned} E[n] &= \mu, \\ E[n^2] &= \mu^2 + \sigma_n^2, \\ E[n^3] &= \mu^3 + 3\mu\sigma_n^2, \\ E[n^4] &= \mu^4 + 6\mu^2\sigma_n^2 + 3\sigma_n^4, \\ &\vdots \end{aligned} \quad (18)$$

Korzystając z zależności (18) otrzymujemy, że $E[n] = \mu$ oraz $E[n^2] = \mu^2 + \sigma_n^2$. Stąd na podstawie wzorów (15) i (16):

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{n}_q] &= \frac{1}{M} \sigma_n^2 \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^{-2} + \right. \\ &+ 2 \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} (-1)^i e^{-0.5 \left(\frac{2\pi i \sigma_n}{q} \right)^2} e^{j 2\pi i \frac{\mu}{q}} \left(\left(\frac{2\pi i \sigma_n}{q} \right)^{-2} + 1 \right) + \\ &\left. + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^{-2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} e^{-0.5 \left(\frac{2\pi i \sigma_n}{q} \right)^2} e^{j 2\pi (i+k) \frac{\mu}{q}} \frac{(-1)^{i+k}}{ik} \right). \end{aligned} \quad (19)$$

Ponieważ funkcja Φ_n ze wzoru (15) jest symetryczna względem zerowej wartości średniej μ to wzór (19) upraszcza się do postaci:

$$\begin{aligned} \text{Var}[\tilde{n}_q] &= \frac{1}{M} \sigma_n^2 \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^{-2} + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^i e^{-0.5 \left(\frac{2\pi i \sigma_n}{q} \right)^2} \left(\left(\frac{2\pi i \sigma_n}{q} \right)^{-2} + 1 \right) \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Jak pokazano w punkcie 2 pracy, w ogólności wariancja $\text{Var}[\tilde{n}_q]$ nie jest równa błędowi $\Delta_{\tilde{n}_q}^2$. Jednakże dla badanego sygnału $\mu = 0$ oraz $b = 0$. Ponadto dla $M \rightarrow \infty$ wariancja $\text{Var}[\tilde{n}_q]$ ze wzoru (20) przyjmuje wartość równą zero. Oznacza to, że estymator $\tilde{n}_q$ wartości średniej sygnału jest nie tylko nieobciążony, ale i zgodny.

W tab. 1 przedstawiono wyniki obliczeń wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim. Podczas obliczeń przyjęto $M = 1000$, $B = 3$,

$q = 3\sigma_n/2^{B-1}$. Badania powtórzono dla $B = 8$. Zakres zmiany indeksu sumy we wzorze (20) ograniczono do 1 000.

Tab. 1. Wariancja cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim

Tab. 1. Variance of mean value digital estimator of Gaussian PDF signal

$\sigma_n [V]$	$\text{Var}[\tilde{n}_q] [V^2]$	
	$B = 3$	$B = 8$
0.25	0.00655	0.00625
0.5	0.0262	0.0250
0.75	0.0589	0.0563
1.0	0.105	0.100

Zwiększenie dyspersji sygnału powoduje zwiększenie rozrzutu wyników wokół wartości średniej. Obserwujemy wówczas wzrost wariancji. Jak pokazują wyniki obliczeń zamieszczone w tab. 1, zmiana odchylenia standardowego σ_n sygnału losowego o rozkładzie gaussowskim wywołuje oczekiwany wzrost wariancji estymatora $\tilde{n}_q$ wartości średniej sygnału n_q . Co ciekawe, rosnąca rozdzielczość przetwornika w niewielkim stopniu kompensuje wzrost wariancji. Oznacza to, że powodowana kwantowaniem degradacja sygnału n tylko nieznacznie wpływa na końcową wartość wariancji cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału n_q . Wpływu tego jednak nie można zaniedbać podczas oceny niepewności wyniku pomiaru wartości średniej sygnału n_q .

4. Wnioski

W artykule przedstawiono postać cyfrowego estymatora wartości średniej sygnału. Obliczono wartość oczekiwaną estymatora. Na tej podstawie wyznaczono wynikające z kwantowania obciążenie. W dalszej części artykułu przedstawiono zależność matematyczną umożliwiającą obliczanie wariancji estymatora. Na tej podstawie oraz na podstawie błędu średniokwadratowego estymatora oceniono jego zgodność. Badany estymator okazał się nie tylko obciążony, nie był również estymatorem zgodnym. W rzeczywistych sytuacjach pomiarowych estymacja obciążenia i wariancji wymaga najczęściej wielokrotnego powtarzania eksperymentu pomiarowego. Nie są przy tym sformułowane kryteria dotyczące dokładności prowadzonych oszacowań. Przedstawione w pracy wzory omijają problem niejednoznaczności oszacowań i umożliwiają, na podstawie momentów, obliczenie obciążenia i wariancji estymatora wartości średniej skwantowanego sygnału. Wyniki badań zamieszczone w artykule są kluczowe podczas oceny niepewności wyniku pomiaru wartości średniej obliczanej na podstawie cyfrowych danych pomiarowych. To zagadnienie będzie przedmiotem dalszych badań autorów referatu.

5. Literatura

- [1] Bendat J., Piersol A.: Random Data Analysis and Measurement Procedures, John Wiley & Sons, 1986.
- [2] Lyons R.G.: Understanding Digital Signal Processing, Prentice Hall PTR, 2004.
- [3] Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, BIPM, 1995.
- [4] Widrow B., Kollar I.: Quantization Noise, Roundoff Error in Digital Computation, Signal Processing, Control, and Communications, Cambridge University Press, 2008.
- [5] Korn G. T.: Mathematical Handbook for Scientists and Engineers, New York: McGraw-Hill, 1961.
- [6] Papoulis A.: Probability, Random Variables, and Stochastic Processes., New York: McGraw-Hill, 1965.