

# Sterowanie poziomem w metodach projekcyjnych dla problemów minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej

Robert Dylewski

**Streszczenie:** W artykule przedstawiono nową metodę sterowania poziomem ze zmiennym parametrem poziomu, używaną w metodach projekcyjnych dla problemów minimalizacji wypukłej, w których funkcja celu nie musi być różniczkowalna. Pokazano, że metoda ta spełnia warunki gwarantujące zbieżność do rozwiązania problemu. Uzyskane wyniki, dla problemów testowych, wskazują na możliwość zmniejszenia liczby wyznaczeń wartości funkcji celu i subgradientu potrzebnej do wyznaczenia rozwiązania  $\varepsilon$ -optymalnego.

**Słowa kluczowe:** metody projekcyjne, minimalizacja wypukła nieróżniczkowalna

## 1. WPROWADZENIE

W artykule rozważamy problem minimalizacji wypukłej postaci:

$$\begin{array}{ll} \text{minimalizować} & f(x) \\ \text{względem} & x \in D, \end{array} \quad (1)$$

gdzie funkcja  $f: R^n \rightarrow R$  jest wypukła (niekoniecznie różniczkowalna) i zbiór  $D \subset R^n$  jest niepusty, zwarty i wypukły. Wtedy zbiór rozwiązań optymalnych dla tego problemu  $M = \{z \in D: f(z) \leq f(x) \text{ dla każdego } x \in D\}$  jest niepusty, czyli funkcja  $f$  osiąga minimum  $f^*$  na zbiorze  $D$ .

Zajmujemy się metodami wyznaczania rozwiązania problemu (1), które mają postać procedur iteracyjnych generujących ciąg  $(x_k)$  kolejnych przybliżeń postaci:

$$\begin{array}{l} x_1 \in D - \text{dowolny} \\ x_{k+1} = P_D(x_k + \lambda_k t_k), \end{array} \quad (2)$$

gdzie:  $t_k \in R^n$  jest kierunkiem poszukiwań,  $\lambda_k > 0$  jest długością kroku, zaś  $P_D(x) = \arg \min_{y \in D} \|y - x\|$  oznacza projekcję metryczną punktu  $x$  na zbiór  $D$ , ( $\|x\| = \sqrt{x^T x}$  - norma euklidesowa wektora  $x \in R^n$ ).

Funkcja celu  $f$  dla problemu minimalizacji wypukłej (1) najczęściej nie jest podana *explicite*. Jej wartości są często rozwiązaniami pewnych pomocniczych problemów. Dla zadań minimalizacji wypukłej stawia się minimalne wymagania dotyczące informacji o funkcji celu  $f$ :

(W1) dla każdego  $x \in D$  można wyznaczyć wartość  $f(x)$  funkcji celu  $f$  i jej (jeden) subgradient  $g_f(x)$ .

Wymaganie to realizuje się poprzez odwoływanie się procedury iteracyjnej do tzw. „wyroczni” (*oracle*) mającej postać osobnej procedury, w której na wejściu podaje się wektor  $x \in D$  a na wyjściu otrzymuje się wartość  $f(x)$  i jeden subgradient  $g_f(x) \in \partial f(x)$ , gdzie zbiór  $\partial f(x) = \{g \in R^n: f(y) - f(x) \geq \langle g, y - x \rangle, y \in R^n\}$  jest subróżniczką funkcji  $f$  w punkcie  $x$ , ( $\langle x, y \rangle = x^T y$  - standardowy iloczyn skalarny wektorów  $x, y \in R^n$ ). Wyznaczenie  $f(x)$  i  $g_f(x)$  jest często obliczeniowo znacznie kosztowniejsze niż wyznaczenie kierunku poszukiwań  $t \in R^n$ . Procedura iteracyjna powinna być więc skonstruowana tak, aby możliwie jak najmniej razy odwoływała się do „wyroczni”. Tego typu wymagania stosuje się w większości metod minimalizacji wypukłej. Przy porównywaniu różnych metod, bierze się przede wszystkim pod uwagę liczbę wyznaczeń wartości funkcji celu i jej subgradientu potrzebną do otrzymania tzw. rozwiązania  $\varepsilon$ -optymalnego. Punkt  $x_\varepsilon \in D$  nazywany jest rozwiązaniem  $\varepsilon$ -optymalnym problemu (1), jeśli spełniony jest warunek:

$$f(x_\varepsilon) \leq f(x) + \varepsilon \text{ dla każdego } x \in D. \quad (3)$$

Podobne uwagi dotyczą zbioru rozwiązań dopuszczalnych  $D$ . Zakłada się, że informacje o tym zbiorze uzyskuje się w trakcie realizacji procedury iteracyjnej w następujący sposób:

(W2) dla każdego  $x \in R^n$  można wyznaczyć projekcję metryczną  $P_D(x)$  punktu  $x$  na zbiór rozwiązań dopuszczalnych  $D$ .

Założenie (W2) powoduje, że dla danego punktu  $x \in R^n$  można stwierdzić, czy jest on rozwiązaniem dopuszczalnym. Jeżeli nim nie jest, to możemy w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych wyznaczyć punkt leżący najbliżej punktu  $x$ .

Zwróćmy uwagę, że w minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej, klasyczne metody minimalizacji (wykorzystujące różniczkowalność funkcji celu) nie mogą być stosowane. Nie muszą one być zbieżne do rozwiązania optymalnego, nawet gdy funkcja celu jest różniczkowalna we wszystkich kolejnych przybliżeniach rozwiązania. Można otrzymać też zbieżność do punktu, który nie jest rozwiązaniem optymalnym [13].

## 2. METODY PROJEKCYJNE ZE STEROWANIEM POZIOMEM

Metody projekcyjne ze sterowaniem poziomem dla problemu (1) mają postać schematu iteracyjnego (2), gdzie:

- $\lambda_k \in (0,2)$  jest tzw. współczynnikiem relaksacyjnym;
- wektor  $t_k$  jest postaci

$$t_k = P_{S_k}(x_k) - x_k; \quad (4)$$

- zbiór  $S_k$  jest postaci

$$S_k = \bigcap_{i \in L_k} S(f_i, \alpha_k), \quad (5)$$

gdzie:  $S(f_i, \alpha_k) = \{x \in R^n : f_i(x) \leq \alpha_k\}$  jest zbiorem podpoziomicowym funkcji  $f_i$  dla poziomu  $\alpha_k$ , a  $f_i(x) = \langle g_f(x_i), x - x_i \rangle + f(x_i)$  jest linearyzacją funkcji  $f$  wyznaczoną w punkcie  $x_i$ ;

- $L_k \subset \{1, 2, \dots, k\}$  jest zbiorem wybranych linearyzacji takim, że  $k \in L_k$ ;
- poziom

$$\alpha_k = (1 - \mu_k) \bar{\alpha}_k + \mu_k \underline{\alpha}_k \quad (6)$$

jest przybliżeniem wartości minimalnej  $f^*$  funkcji celu  $f$ ;

- $\mu_k \in (0,1]$  jest parametrem poziomu;
- $\bar{\alpha}_k$  jest górnym ograniczeniem wartości  $f^*$

$$\bar{\alpha}_k = \min_{1 \leq i \leq k} f(x_i); \quad (7)$$

- $\underline{\alpha}_k$  jest dolnym ograniczeniem wartości  $f^*$  aktualizowanym w trakcie procesu iteracyjnego

$$\underline{\alpha}_k \leq f^*. \quad (8)$$

Dodatkowo zakłada się, że znane są:

- górne ograniczenie  $R$  odległości punktu startowego  $x_1$  od zbioru rozwiązań  $M$ ,  $R \geq d(x_1, M)$ ,
- początkowe dolne ograniczenie  $\underline{\alpha}_1$  wartości minimalnej  $f^*$  funkcji  $f$ .

Jeżeli nie znamy lepszego początkowego dolnego ograniczenia  $\underline{\alpha}_1$  wartości  $f^*$ , to można przyjąć  $\underline{\alpha}_1 = f(x_1) - \|g_f(x_1)\|R$  (patrz [5, Remark 3]).

Przedstawiona powyżej metoda jest modyfikacją metod opisanych w [1, Iterative Scheme 2] i [8, Algorithm 2.2]. W prezentowanej metodzie wprowadzono zmienny parametr poziomu  $\mu_k$  w miejsce  $\mu = const$  w metodach [1] i [8].

W omawianej metodzie projekcyjnej ważnym problemem jest odpowiednia selekcja linearyzacji (wybór zbioru  $L_k$ ) w celu konstrukcji zbioru  $S_k$  i wektora  $t_k$ . W najprostszej metodzie Kima-Ahna-Cho [7] wybiera się tylko linearyzację uzyskaną w bieżącej iteracji ( $L_k = \{k\}$ ). Drugą skrajną możliwością jest wybór wszystkich dotychczas otrzymanych linearyzacji ( $L_k = \{1, 2, \dots, k\}$ ), jest tak w metodzie Lemaréchal-Nemirovskiego-Nesterova [10]. Pierwsza metoda okazuje się w praktyce bardzo wolno zbieżna, choć koszt pojedynczej iteracji jest

niewielki. Dla drugiej metody obserwuje się w praktyce zbieżność znacznie szybszą od pierwszej, ale nakłady obliczeniowe w pojedynczej iteracji są bardzo duże. W każdej iteracji jest m.in. rozwiązywane zadanie programowania kwadratowego w celu wyznaczenia wektora projekcyjnego  $t_k$  (4). W pracach [8, 1, 3, 4] przedstawiono metody selekcji linearyzacji będące pewnym kompromisem między przedstawionymi skrajnymi możliwościami. W pracy [8] pokazano, że jeżeli  $L_k$  jest pewnym podzbiorem zbioru  $\{1, 2, \dots, k\}$  takim, że  $k \in L_k$ , to przy odpowiedniej aktualizacji ograniczenia dolnego  $\underline{\alpha}_k$  ciąg  $x_k$  jest zbieżny do rozwiązania. W pracy [1] wprowadzono model selekcji stożka rozwartego, a w pracach [3, 4] model selekcji residualnej.

Osobnym problemem w metodach projekcyjnych jest uaktualnianie dolnego ograniczenia  $\underline{\alpha}_k$  wartości  $f^*$ . W metodzie Kima-Ahna-Cho [7] wprowadzono sposób, pozwalający wykryć kiedy  $\alpha_k < f^*$  (korzystając ze znajomości  $R$ ). Jeżeli stwierdzi się, że  $\alpha_k < f^*$ , to w kolejnej iteracji można przyjąć  $\underline{\alpha}_{k+1} = \alpha_k$ . W metodach selekcji linearyzacji wprowadzonych w [1, 3, 4] można dodatkowo wykrywać kiedy poziom  $\alpha_k$  jest za niski ( $\alpha_k < f^*$ ) w przypadku kiedy wyznaczony zbiór  $S_k = \emptyset$  (korzystając z rozkładu Cholesky'ego macierzy Grama  $G_L^T G_L$  kolumn macierzy  $G_L = [g_f(x_i) : i \in L_k]$ ).

W pracy [5] pokazano zbieżność prezentowanej metody (2, 4, 5, 6, 7, 8), dla parametru poziomu  $\mu_k$  spełniającego warunek

$$\mu_k \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}], 0 < \underline{\mu} \leq \bar{\mu} < 1, \quad (9)$$

do rozwiązania problemu (1). Parametr  $\mu_k$  spełniający warunek (9) wprowadzony w metodzie projekcyjnej w pracy [5] nie musi być stały tak jak we wcześniejszych metodach z prac [8, 1].

## 3. STEROWANIE POZIOMEM

W punkcie tym przedstawiono propozycję sterowania poziomem  $\alpha_k$  (6, 7, 8), które spełnia warunek (9). Pomysł jest podobny do zaproponowanego w metodzie subgradientowej przedstawionej w pracy [6], która jest pewną modyfikacją metody Polyaka [11]. Idea polega na tym, żeby poziom  $\alpha_k$  nie obniżać po każdej poprawie (zmniejszeniu)  $\bar{\alpha}_k$ , a dopiero po uzyskaniu „wystarczającego spadku”.

Niech  $\mu \in (0,1)$ . Wprowadzamy dodatkowo parametr  $p_k$  do sprawdzania wystarczającego spadku:

$$p_k = \beta \bar{p}_k + (1 - \beta) \alpha_k, \quad (10)$$

gdzie  $\beta \in (0,1]$ , natomiast  $\bar{p}_k$  i  $\alpha_k$  są aktualizowane w następujący sposób:

- $\bar{p}_1 = \bar{\alpha}_1$ ,
- jeżeli  $f(x_k) \leq p_k$ , to przyjąć  $\bar{p}_k = f(x_k) = \bar{\alpha}_k$ ,  
w przeciwnym przypadku przyjąć  $\bar{p}_k = \bar{p}_{k-1}$ , (11)
- $\alpha_k = (1 - \mu) \bar{p}_k + \mu \underline{\alpha}_k$ . (12)

Pokażemy teraz, że sterowanie poziomem opisane przez (10, 11, 12) spełnia warunek (9).

Uwagi:

- 1) Jeżeli  $\beta = 1$ , to dla każdego  $k \geq 1$  mamy  $p_k = \bar{p}_k = \bar{\alpha}_k$  (z (10) i (11)) i w (12) otrzymujemy  $\alpha_k = (1 - \mu_k)\bar{\alpha}_k + \mu_k \underline{\alpha}_k$ , gdzie  $\mu_k = \mu = \text{const}$  (czyli  $\mu_k \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ , gdzie  $\underline{\mu} = \bar{\mu} = \mu$ ). Spełniony jest zatem warunek (9).
- 2) Jeżeli  $\beta \in (0, 1)$  i w  $k$ -tej iteracji  $f(x_k) \leq p_k$  w (11), to  $\bar{p}_k = \bar{\alpha}_k$  i podobnie jak w uwadze 1) spełniony jest warunek (9) z  $\mu_k = \mu$ .
- 3) Jeżeli  $\beta \in (0, 1)$  i w  $k$ -tej iteracji  $f(x_k) > p_k$  w (11), to  $\bar{p}_k = \bar{p}_{k-1} \geq \bar{\alpha}_k$  i w konsekwencji w (12) mamy  $\alpha_k = \alpha_{k-1}$ . Niech teraz

$$\mu_k = (\bar{\alpha}_k - \alpha_{k-1}) / (\bar{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k). \quad (13)$$

Przyjmując w (6) parametr  $\mu_k$  określony przez (13) otrzymujemy także  $\alpha_k = \alpha_{k-1}$ . Zatem poziom zdefiniowany w (12), gdzie  $\mu = (\bar{p}_k - \alpha_{k-1}) / (\bar{p}_k - \underline{\alpha}_k)$  jest równy poziomowi zdefiniowanemu w (6) z  $\mu_k$  określonym przez (13). Pozostaje pokazać, że  $\mu_k$  w (13) spełnia warunek (9). Ponieważ  $\bar{p}_k \geq \bar{\alpha}_k$ , więc  $\mu_k \leq \mu$ . Ponadto, ponieważ  $\bar{\alpha}_k > p_k$ ,  $\bar{p}_k - \underline{\alpha}_k = (\bar{p}_k - \alpha_k) / \mu$  i  $p_k - \alpha_k = \beta(\bar{p}_k - \alpha_k)$ , więc  $\mu_k > (p_k - \alpha_k) / (\bar{p}_k - \underline{\alpha}_k) = \beta\mu$ . Zatem  $\mu_k \in [\underline{\mu}, \bar{\mu}]$ , gdzie  $\underline{\mu} = \beta\mu$ ,  $\bar{\mu} = \mu$ .

## 4. TESTY NUMERYCZNE

W punkcie tym przedstawiono wyniki dla metody projekcyjnej ze sterowaniem poziomem opisanym w punkcie 3.

### 4.1. PROBLEMY TESTOWE

Testy numeryczne przeprowadzono dla następujących standardowych problemów testowych minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej:

- 1) Problem Shora (Shor) [12]

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq 10} b_i \sum_{j=1}^n (\xi_j - a_{ij})^2, \quad n = 5,$$

$$f^* \cong 22.600162096, \|x_1 - x^*\| \cong 2.2955, f(x_1) = 80.$$

- 2) Problem Goffina (Goffin)

$$f(x) = n \max_{1 \leq j \leq n} \xi_j - \sum_{j=1}^n \xi_j, \quad n = 50,$$

$$f^* = 0, \|x_1 - x^*\| = 102.042, f(x_1) \cong 1225.$$

- 3) Problem Hilberta (L1hil)

$$f(x) = \sum_{i=1}^n \left| \sum_{j=1}^n (\xi_j - 1) / (i + j - 1) \right|, \quad n = 10,$$

$$f^* = 0, \|x_1 - x^*\| = 3.162, f(x_1) \cong 13.3754.$$

- 4) Problem Lemaréchal (Maxquad) [9]

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq 5} (x^T A_i x - b_i^T x), \quad n = 10,$$

$$f^* \cong -0.84140833, \|x_1 - x^*\| \cong 3.189, f(x_1) = 5337.$$

- 5) Problem Lemaréchal (TR48) [9]

$$f(x) = \sum_{i=1}^n d_i \max_{1 \leq j \leq n} (\xi_j - a_{ij}) - \sum_{j=1}^n s_j \xi_j, \quad n = 48,$$

$$f^* = -638565, \|x_1 - x^*\| \cong 1978.4, f(x_1) = -464816.$$

- 6) Problem Rosena-Suzuki (Rosen) [2]

$$f(x) = \max_{1 \leq i \leq 4} (x^T A_i x - b_i^T x + c_i), \quad n = 4,$$

$$f^* \cong -44, \|x_1 - x^*\| \cong 2.44954, f(x_1) = 0.$$

## 4.2. WYNIKI TESTÓW

W punkcie tym przedstawiamy rezultaty testów numerycznych dla metody projekcyjnej ze sterowaniem poziomem opisaną w punkcie 2, (szczegóły metody przedstawione są w pracy [5]). Wykorzystano zaproponowane przez autora sterowanie poziomem opisaną w punkcie 3, spełniające warunek (9). Do selekcji linearyzacji wykorzystano metodę selekcji residualnej (szczegóły przedstawione są w pracach [3, 4]).

W prezentowanych wynikach przez  $R$  oznaczamy przyjęte górne ograniczenie odległości punktu startowego od zbioru rozwiązań ( $R \geq d(x_1, M)$ ) i przyjmujemy  $D = B(x_1, R)$ . Stosujemy kryterium zatrzymania postaci  $\bar{\alpha}_k - \underline{\alpha}_k \leq \varepsilon$  dla bezwzględnej tolerancji optymalności  $\varepsilon$ . Po spełnieniu takiego kryterium zatrzymania, dla punktu  $\bar{x}_k = \arg \min_{1 \leq i \leq k} f(x_i)$  zachodzi  $f(\bar{x}_k) \leq f^* + \varepsilon$ , zatem  $\bar{x}_k$  jest rozwiązaniem  $\varepsilon$ -optymalnym (patrz warunek (3)) dla problemu (1).

Przez  $\#f/g$  oznaczamy liczbę wyznaczeń wartości funkcji celu i jej subgradientu, a przez  $\#l$  liczbę aktualizacji ograniczenia dolnego  $\underline{\alpha}_k$  wartości  $f^*$ .

Metoda została zaprogramowana w Fortranie 90 (Lahey Fortran 90 v. 3.5), a obliczenia były przeprowadzone przy podwójnej precyzji.

W tabeli 1 przedstawiono wyniki testów numerycznych dla podanych problemów testowych. Przyjęto współczynnik relaksacyjny  $\lambda_k = 1$  i parametr  $\mu = 0.5$ . Porównano wyniki dla  $\beta = 1$  i  $\beta = 0.8$ .

Przypomnijmy, że dla  $\beta = 1$  otrzymujemy poziom  $\alpha_k = (1 - \mu_k)\bar{\alpha}_k + \mu_k \underline{\alpha}_k$ , gdzie  $\mu_k = \mu = \text{const}$  dla każdego  $k \geq 1$ , a poprawa  $\bar{p}_k$  jest wykonywana od razu ( $\bar{p}_k = \bar{\alpha}_k$ ), gdy  $f(x_k) \leq \bar{\alpha}_k$  (patrz uwaga 1)). Natomiast dla  $\beta = 0.8$ , jeżeli w  $k$ -tej iteracji  $f(x_k) > p_k$ , to  $\mu_k \leq \mu$ ,  $\alpha_k = \alpha_{k-1}$ , a  $\bar{p}_k = \bar{p}_{k-1} \geq \bar{\alpha}_k$  (patrz uwaga 3)). Możemy zaobserwować, dla podanych problemów testowych,

poprawę wyników dla  $\beta = 0.8 < 1$  w porównaniu z  $\beta = 1$  (patrz tabela 1). W większości przypadków uzyskujemy mniejszą liczbę wyznaczeń wartości funkcji celu i subgradientu  $\#f/g$ , ponadto częściej wykonywane są uaktualnienia dolnego ograniczenia  $\underline{\alpha}_k$  wartości minimalnej  $f^*$  funkcji celu.

**Tabela 1.**  
Wyniki testów

| Problem | $\underline{\alpha}_1$ | R              | $\varepsilon$ | $\beta = 1$ |       | $\beta = 0.8$ |       |
|---------|------------------------|----------------|---------------|-------------|-------|---------------|-------|
|         |                        |                |               | $\#f/g$     | $\#l$ | $\#f/g$       | $\#l$ |
| Shor    | 0                      | $10^2$         | $10^{-6}$     | 41          | 15    | 35            | 18    |
|         |                        |                | $10^{-8}$     | 47          | 20    | 42            | 23    |
| Goffin  | $-10^2$                | $10^3$         | $10^{-6}$     | 66          | 12    | 61            | 17    |
|         |                        |                | $10^{-8}$     | 68          | 17    | 63            | 21    |
| L1hil   | $-10^2$                | $10^3$         | $10^{-6}$     | 30          | 15    | 30            | 15    |
|         |                        |                | $10^{-8}$     | 47          | 18    | 41            | 19    |
| Maxquad | -10                    | $10^2$         | $10^{-6}$     | 150         | 19    | 146           | 18    |
|         |                        |                | $10^{-8}$     | 164         | 24    | 166           | 22    |
| TR48    | $-7 \cdot 10^5$        | $5 \cdot 10^3$ | $10^{-6}$     | 2337        | 12    | 1975          | 12    |
|         |                        |                | $10^{-8}$     | 2707        | 14    | 2462          | 15    |
| Rosen   | $-10^2$                | $10^2$         | $10^{-6}$     | 45          | 19    | 41            | 19    |
|         |                        |                | $10^{-8}$     | 50          | 24    | 50            | 24    |

## 5. PODSUMOWANIE

Problemy minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej pojawiają się w optymalizacji w sposób naturalny. Często w wyniku tzw. dyskretyzacji problemu wyjściowego (np. zagadnienie planowania radioterapii z użyciem wiązek o modulowanej intensywności, zagadnienie tomografii komputerowej, problem ugięcia membrany, programowanie seminieskończone) otrzymujemy do rozwiązania problem z funkcją celu wypukłą i nieróżniczkowalną.

W artykule zaproponowano nową metodę sterowania poziomem ze zmiennym parametrem poziomu w metodach projekcyjnych dla problemu minimalizacji wypukłej, niekoniecznie różniczkowalnej. Pokazano, że metoda ta spełnia warunki przedstawione w [5] gwarantujące zbieżność do rozwiązania. W metodzie tej parametr poziomu nie musi być stały dla każdej iteracji.

Implementację wykonano w Fortranie 90. Uzyskane wyniki, dla podanych standardowych problemów testowych minimalizacji wypukłej nieróżniczkowalnej, wskazują na możliwość zmniejszenia liczby wyznaczeń wartości funkcji celu i subgradientu potrzebnej do wyznaczenia rozwiązania  $\varepsilon$ -optymalnego, przy jednocześnie zwiększonej częstotliwości uaktualnień dolnego ograniczenia wartości minimalnej funkcji celu. Zaproponowana metoda sterowania poziomem pozwala zatem na poprawę szybkości zbieżności.

## LITERATURA

- [1] Cegielski A., „A method of projection onto an acute cone with level control in convex minimization”, *Mathematical Programming*, 85, ss. 469-490, 1999.
- [2] Charalambous J., Conn A.R., „An efficient method to solve the minimax problem directly”, *SIAM J. Num. Anal.*, 15, ss. 162-187, 1978.
- [3] Cegielski A., Dylewski R., „Selection strategies in projection methods for convex minimization problems”, *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 22, ss. 97-123, 2002.
- [4] Cegielski A., Dylewski R., „Residual selection in a projection method for convex minimization problems”, *Optimization*, 52, ss. 211-220, 2003.
- [5] Dylewski R., „Projection method with level control in convex minimization”, *Discussiones Mathematicae. Differential Inclusions, Control and Optimization*, 30, (w druku, s. 20), 2010.
- [6] Goffin J.-L., Kiwiel K.C., „Convergence of a simple subgradient level method”, *Mathematical Programming*, 85, ss. 207-211, 1999.
- [7] Kim S., Ahn H., Cho S.-C., „Variable target value subgradient method”, *Mathematical Programming*, 49, ss. 359-369, 1991.
- [8] Kiwiel K.C., „The efficiency of subgradient projection methods for convex optimization, part I: General level methods”, *SIAM J. Control and Optimization*, 34, ss. 660-676, 1996.
- [9] Lemaréchal C., Mifflin R., „A set of nonsmooth optimization test problems”, *Nonsmooth Optimization*, Lemaréchal C., Mifflin R., (red.), Pergamon Press, Oxford, ss. 151-165, 1978.
- [10] Lemaréchal C., Nemirovskii A.S., Nesterov Yu.E., „New variants of bundle methods”, *Mathematical Programming*, 69, ss. 111-147, 1995.
- [11] Polyak B.T., „Minimization of unsmooth functionals”, *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 9, ss. 509-521, 1969.
- [12] Shor N.Z., *Minimization Methods for Non-Differentiable Functions*. Berlin: Springer-Verlag, 1985.
- [13] Schramm H., Zowe J., „A version of the bundle idea for minimizing a nonsmooth function: conceptual idea, convergence analysis, numerical results”, *SIAM J. Optimization*, 2, ss. 121-152, 1992.



**dr Robert Dylewski**

Uniwersytet Zielonogórski  
Wydział Matematyki, Informatyki i  
Ekonometrii

ul. prof. Z. Szafrana 4a  
65-516 Zielona Góra

tel.: 68 328 28 75  
e-mail: r.dylewski@wmie.uz.zgora.pl