

Zracjonalizowany algorytm mnożenia dwóch kwaternionów

Alexandr Tariov, Galina Tariova

Streszczenie: W pracy został przedstawiony syntetyzowany przez autorów zracjonalizowany algorytm mnożenia dwóch kwaternionów wymagający w najbardziej ogólnym przypadku wykonania mniejszej liczby operacji mnożenia w stosunku do bezpośredniego, naiwnego sposobu liczenia.

Słowa kluczowe: mnożenie kwaternionów, szybkie algorytmy, notacja macierzowa

1. WPROWADZENIE

Nieustanny progres w dziedzinie cyfrowego przetwarzania sygnałów (CPS) oraz potrzeba realizacji coraz to bardziej skomplikowanych zadań i aplikacji praktycznych wymagają zastosowania w tym celu coraz bardziej zaawansowanych i skomplikowanych metod oraz formalizmów matematycznych. Obecnie na coraz szerszą skalę do syntezy, opisu i realizacji wysoce efektywnych algorytmów CPS stosuje się aparat matematyczny algebry liczb hiperzespółonych [7, 11]. Dotyczy to głównie zadań związanych z uogólnieniem dyskretnej transformaty Fouriera oraz innych transformacji ortogonalnych, filtracji sygnałów jedno- i wielowymiarowych, wieloroździelczej reprezentacji danych [1-3, 5, 6, 9].

Przy realizacji wspomnianych zadań w przestrzeniach hiperzespółonych jedną z najbardziej pracochłonnych operacji (a raczej „makrooperacji”) jest mnożenie dwóch kwaternionów, gdyż wymaga wykonania kilkunastu konwencjonalnych operacji mnożenia oraz dodawania liczb rzeczywistych [4]. Intencją projektantów wysoce efektywnych algorytmów, od zawsze, było poszukiwanie sposobów redukcji liczby operacji arytmetycznych w algorytmach obliczeniowych. Dotyczy to szczególnie minimalizacji ilości operacji mnożenia będących, od samego początku rozwoju komputeryzacji, najbardziej czasochłonnymi w całym zbiorze operacji przetwarzania danych. Zgodnie z tym zamysłem, w pracy [8] został zaproponowany sposób obliczania iloczynu dwóch kwaternionów wymagający, względem pierwowzoru, dwukrotnie mniejszej liczby operacji mnożenia kosztem więcej niż potrójnego nadłożenia liczby operacji algebraicznego dodawania liczb rzeczywistych. W [10] podjęto próbę udoskonalenia tego algorytmu w celu dalszej redukcji liczby dodawań przy zachowaniu takiej samej liczby mnożeń.

Jednak w rozwiązaniach tam przykładzie, jako dane wejściowe były użyte nie tradycyjne kwaterniony, ale pseudokwaterniony, których mnożenie odbywa się naturalnie w sposób prostszy, niż mnożenie „prawdziwych”

kwaternionów. Dlatego wyników tej pracy oraz zadeklarowanych rezultatów nie można uznać za przekonujące.

Celem niniejszej pracy jest przedstawienie oryginalnych wyników syntezy i zracjonalizowanego, przez nas, algorytmu liczenia iloczynu dwóch kwaternionów wymagającego, w najbardziej ogólnym przypadku, wykonania mniejszej liczby operacji mnożenia w stosunku do bezpośredniego, naiwnego sposobu liczenia kosztem znacznie mniejszego, niż w metodzie [8] zwiększenia liczby operacji dodawania.

2. SYNTEZA WEKTOROWO-MACIERZOWEJ PROCEDURY OBLICZENIOWEJ LICZENIA ILOCZYNU DWÓCH KWATERNIONÓW

Założmy, że mamy do czynienia z dwoma kwaternionami:

$$a = a_0 + ia_1 + ja_2 + ka_3 \quad \text{ i } \quad b = b_0 + ib_1 + jb_2 + kb_3,$$

których iloczyn $c = c_0 + ic_1 + jc_2 + kc_3$ chcemy wyliczyć.

Operacja mnożenia kwaternionów może być przedstawiona w postaci iloczynu wektorowo-macierzowego:

$$\mathbf{Y}_{4 \times 1} = \mathbf{B}_4 \mathbf{X}_{4 \times 1}, \quad (1)$$

gdzie

$$\mathbf{Y}_{4 \times 1} = [c_0, c_1, c_2, c_3]^T, \quad \mathbf{X}_{4 \times 1} = [a_0, a_1, a_2, a_3]^T,$$

$$\mathbf{B}_4 = \begin{pmatrix} b_0 & -b_1 & -b_2 & -b_3 \\ b_1 & b_0 & b_3 & -b_2 \\ b_2 & -b_3 & b_0 & b_1 \\ b_3 & b_2 & -b_1 & b_0 \end{pmatrix}.$$

Realizacja operacji (1) wymaga wykonania 12 operacji dodawania algebraicznego oraz 16 operacji mnożenia liczb rzeczywistych. Problem, który należy rozwiązać, jest zredukowanie liczby mnożeń niezbędnych do wyznaczania tego wzoru, chociażby kosztem pewnego zwiększenia liczby operacji dodawania. Jest to możliwe, dzięki odpowiedniemu przestawieniu kolumn i wierszy w macierzy $\mathbf{B}_4$ przez co uzyskuje ona sprzyjającą redukcji układ blokowy i może zostać poddana faktoryzacji zgodnie z metoda [12].

Zamieńmy miejscami odpowiednio drugą i czwartą kolumnę oraz pierwszy i trzeci wiersz. Zmodyfikowana w ten sposób macierz przybiera następującą postać:

$$\tilde{\mathbf{B}}_4 = \left(\begin{array}{cc|cc} -b_2 & -b_1 & b_0 & -b_3 \\ -b_1 & b_2 & b_3 & b_0 \\ \hline b_0 & -b_3 & b_2 & b_1 \\ b_1 & b_0 & b_1 & -b_2 \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{A}_2 & & \mathbf{B}_2 & \\ & & & \\ \hline \mathbf{B}_2 & & -\mathbf{A}_2 & \end{array} \right).$$

Można zauważyć, że macierz $\tilde{\mathbf{B}}_4$ posiadająca specyficzną strukturę może zostać sfaktoryzowana. Wówczas zrationalizowaną procedurę wyznaczenia iloczynu (1) zgodnie z metodą [12] można przedstawić w sposób następujący:

$$\mathbf{Y}_{4 \times 1} = \mathbf{P}_4^{(2)} \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{I}_2 & & \mathbf{0}_2 & \mathbf{I}_2 \\ & & & \\ \hline \mathbf{0}_2 & & \mathbf{I}_2 & \mathbf{I}_2 \end{array} \right) \text{diag} \left(\begin{array}{c} \frac{\mathbf{A}_2^{(1)}}{\mathbf{A}_2^{(2)}} \\ \frac{\mathbf{A}_2^{(2)}}{\mathbf{A}_2^{(3)}} \end{array} \right) \mathbf{X}_{6 \times 1}, \quad (2)$$

gdzie $\mathbf{I}_2$ - jest macierzą jednostkową, zaś $\mathbf{0}_2$ - macierzą zerową.

$$\mathbf{A}_2^{(1)} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2, \quad \mathbf{A}_2^{(2)} = -(\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2), \quad \mathbf{A}_2^{(3)} = \mathbf{B}_2,$$

$$\mathbf{X}_{6 \times 1} = \left(\begin{array}{c} \mathbf{X}_{2 \times 1}^{(1)} \\ \mathbf{X}_{2 \times 1}^{(2)} \\ \mathbf{X}_{2 \times 1}^{(3)} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{I}_2 & & \mathbf{0}_2 & \\ & & & \\ \hline \mathbf{0}_2 & & \mathbf{I}_2 & \\ & & & \\ \hline \mathbf{I}_2 & & & \end{array} \right) \mathbf{P}_4^{(1)} \mathbf{X}_{4 \times 1}, \quad (3)$$

$$\mathbf{P}_4^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad \mathbf{P}_4^{(2)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

$$\left(\begin{array}{c} \mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(1)} \\ \mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(2)} \\ \mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(3)} \end{array} \right) = \text{diag} \left(\begin{array}{c} \frac{\mathbf{A}_2^{(1)}}{\mathbf{A}_2^{(2)}} \\ \frac{\mathbf{A}_2^{(2)}}{\mathbf{A}_2^{(3)}} \end{array} \right) \left(\begin{array}{cc|cc} \mathbf{I}_2 & & \mathbf{0}_2 & \\ & & & \\ \hline \mathbf{0}_2 & & \mathbf{I}_2 & \\ & & & \\ \hline \mathbf{I}_2 & & & \end{array} \right) \mathbf{P}_4 \mathbf{X}_{4 \times 1}, \quad (4)$$

W procedurze (3) przez $\mathbf{X}_{2 \times 1}^{(i)}$ oznaczmy podwektory powstające w wyniku wykonania przekształceń związanych wyłącznie z sumowaniem poszczególnych elementów wektora $\mathbf{X}_{4 \times 1}$, zaś przez $\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(i)}$ wyniki mnożenia podwektorów $\mathbf{X}_{2 \times 1}^{(i)}$ przez odpowiednie macierze $\mathbf{A}_2^{(i)}$:

Biorąc wówczas pod uwagę, iż

$$\mathbf{A}_2^{(1)} = \mathbf{A}_2 - \mathbf{B}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} -b_2 - b_0 & & -b_1 + b_3 & \\ & & & \\ \hline -b_1 - b_3 & & b_2 - b_0 & \end{array} \right), \quad (5)$$

$$\mathbf{A}_2^{(2)} = -(\mathbf{A}_2 + \mathbf{B}_2) = \left(\begin{array}{cc|cc} b_2 - b_0 & & b_1 - b_3 & \\ & & & \\ \hline b_1 - b_3 & & -b_2 - b_0 & \end{array} \right), \quad (6)$$

$$\mathbf{A}_2^{(3)} = \mathbf{B}_2 = \left(\begin{array}{cc|cc} b_0 & & -b_3 & \\ & & & \\ \hline b_3 & & b_0 & \end{array} \right), \quad (7)$$

można zapisać:

$$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(1)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{diag} \left(\begin{array}{c} \frac{s_0}{s_1} \\ \frac{s_2}{s_3} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \mathbf{X}_{2 \times 1}^{(1)}, \quad (8)$$

$$s_0 = -(b_2 + b_0), \quad s_1 = -(b_1 + b_3), \\ s_2 = -(b_1 - b_3), \quad s_3 = b_2 - b_0,$$

$$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(2)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 \\ & & & \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{diag} \left(\begin{array}{c} \frac{s_4}{s_5} \\ \frac{s_6}{s_7} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right) \mathbf{X}_{2 \times 1}^{(2)}, \quad (9)$$

$$s_4 = b_2 - b_0, \quad s_5 = b_1 - b_3, \quad s_6 = b_1 + b_3, \\ s_7 = -(b_2 + b_0)$$

$$\mathbf{Y}_{2 \times 1}^{(3)} = \left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 1 & 0 \\ & & & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \text{diag} \left(\begin{array}{c} \frac{s_7}{s_8} \\ \frac{s_8}{s_9} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right) \mathbf{X}_{2 \times 1}^{(3)}, \quad (10)$$

$$s_8 = b_3 - b_0, \quad s_9 = -(b_3 + b_0), \quad s_{10} = b_0.$$

Końcowa procedura obliczeniowa reprezentująca zrationalizowany algorytm wyznaczenia iloczynu dwóch kwaternionów przybiera postać:

$$\mathbf{Y}_{4 \times 1} = \mathbf{P}_4^{(2)} \mathbf{A}_{4 \times 6} \mathbf{A}_{6 \times 11} \mathbf{D}_{11} \mathbf{A}_{11 \times 6} \mathbf{A}_{6 \times 4} \mathbf{P}_4^{(1)} \mathbf{X}_{4 \times 1}, \quad (11)$$

gdzie:

$$\mathbf{A}_{6 \times 4} = \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right), \quad \mathbf{A}_{4 \times 6} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right)$$

$$\mathbf{A}_{11 \times 6} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right),$$

$$\mathbf{A}_{6 \times 11} = \left(\begin{array}{cc|cc|cc|cc} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right),$$

Macierz diagonalna $\mathbf{D}_{11}$ składa się z umieszczonych na jej przekątnej elementów wektora kolumnowego

$$\mathbf{S}_{11 \times 1} = [s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5, s_6, s_7, s_8, s_9, s_{10}]^T.$$

Procedurę wyznaczenia elementów tego wektora można też zrationalizować w sposób następujący:

$$\mathbf{S}_{11 \times 1} = \mathbf{A}_{11 \times 7} \mathbf{A}_7 \mathbf{P}_{7 \times 4} \mathbf{B}_{4 \times 1}, \quad (12)$$

$$\text{gdzie} \quad \mathbf{B}_{4 \times 1} = [b_0, b_1, b_2, b_3]^T,$$

$$\mathbf{P}_{7 \times 4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{A}_{11 \times 7} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Na rysunku 1 została pokazana struktura algorytmiczna hipotetycznego układu, realizującego liczenie iloczynu kwaternionów zgodnie z syntetyzowaną procedurą. Kółkami na rysunku oznaczone zostały operacji mnożenia liczb rzeczywistych (bloki mnożące) przez wartości wpisane w poszczególne kółka. Linie proste symbolizują operacje (kanały) transferu danych. W przypadku skupienia tych linii w odpowiednich punktach struktury mamy do czynienia z operacją sumowania nadchodzących danych realizowanymi za pomocą zwykłych sumatorów.

Z kolei na rysunku 2 przedstawiona została struktura algorytmiczna układu pomocniczego, służącego do wyznaczenia elementów $\{s_i\}$. Prostokątami w tym przypadku oznaczone są operacje (bloki) mnożenia dwuelementowych podwektorów przez macierze

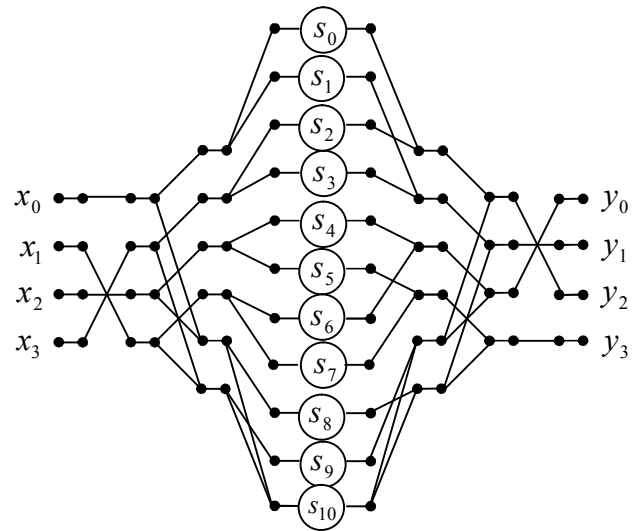
Hadamarda drugiego rzędu $\mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Linie

przerwane tutaj symbolizują operacje zmiany znaku odpowiedniego operandu na przeciwny.

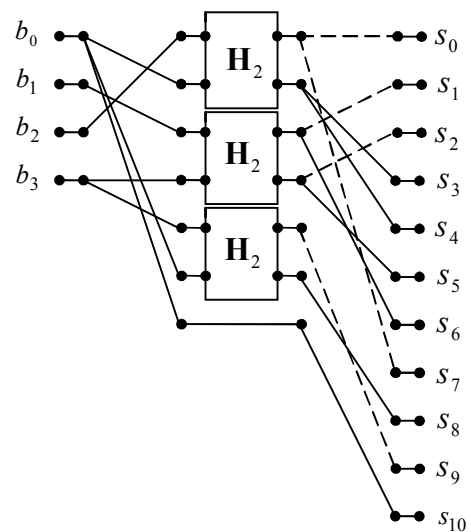
2. DYSKUSJA ASPEKTÓW REALIZACYJNYCH

Omawiana w artykule koncepcja organizacji układu do liczenia iloczynu dwóch kwaternionów, stanowi próbę racjonalizacji jego struktury pod kątem minimalizacji liczby układów mnożących niezbędnych w celu zapewnienia całkowicie równoległej sprzętowej realizacji obliczeń. W tabeli 1 zaprezentowane są liczby bloków

mnożących oraz sumatorów niezbędnych do realizacji trzech różnych rozwiązań, określonych odpowiednio wzorem (1), sposobem [8] oraz proponowanym algorytmem.



Rys. 1. Model grafostukturalny, reprezentujący strukturę algorytmiczną układu liczącego iloczyn kwaternionów zgodnie z procedurą (11)



Rys. 2. Model grafostukturalny, reprezentujący strukturę algorytmiczną bloku do wyznaczenia elementów $\{s_i\}$ zgodnie z procedurą (12)

Należy nadmienić, że w większości zadań cyfrowego przetwarzania sygnałów jeden z kwaternionów biorących udział w mnożeniu jest określany jako „stały”, co oznacza, że jego współczynniki $\{b_i\}$ są z góry znanymi stałymi liczbami rzeczywistymi. Oznacza to, że elementy macierzy $\mathbf{D}_{11}$ obliczane są tylko raz oraz przechowywane w stałej pamięci układu obliczeniowego. Wtedy proponowane w artykule rozwiązanie można uznać za najlepsze ze znanych pod kątem sumarycznej liczby operacji arytmetycznych (bloków operacyjnych) niezbędnych do liczenia iloczynu kwaternionów.

Tabela 1.

Oszacowanie liczby operacji arytmetycznych przy realizacji trzech różnych metod liczenia iloczynu dwóch kwaternionów

Metoda	Liczba „x”	Liczba „+”
Naiwna	16	12
Sposób [8]	8	40
Proponowany algorytm	10	22

W tabeli 2 przedstawiono wyniki oszacowania sumarycznej liczby operacji arytmetycznych w przypadku, gdy jeden z kwaternionów jest „stały”.

Tabela 2.

Oszacowanie łącznej liczby operacji arytmetycznych przy realizacji trzech różnych metod liczenia iloczynu dwóch kwaternionów, w przypadku, gdy jeden z kwaternionów jest „stały”

	Na podstawie wzoru (1)	Sposób [8]	Proponowany algorytm
Liczba operacji	28	28	24

3. PODSUMOWANIE

W artykule poruszono aspekty algorytmiczne organizacji specjalizowanego układu obliczeniowego do wyznaczenia iloczynów dwóch kwaternionów będących uogólnieniem liczb zespolonych. Można stwierdzić, że pod kątem złożoności realizacji sprzętowej proponowane rozwiązanie lokuje się pomiędzy metodą bezpośredniego wyznaczania iloczynu według wyrażenia (1) oraz sposobem liczenia opartym na metodę [8]. Oznacza to, że uzyskana w artykule struktura jest mniej skomplikowana niż byłaby w przypadku realizacji metody bezpośredniej, ponieważ wymaga przy sprzętowej implementacji mniej bloków mnożących mimo, że powoduje zwiększenie wymaganej liczby sumatorów. Należy również nadmienić, że większość nowoczesnych układów procesorowych zawiera zrealizowane sprzętowo wbudowane bloki mnożące, które realizują operacje mnożenia w jednym cyklu zegarowym, tak samo jak i operację dodawania. Przy takich warunkach, zwłaszcza w przypadku sekwencyjnej realizacji obliczeń, minimalizacja liczby mnożeń kosztem zwiększania liczby dodawań może okazać się nieefektywną. W tych okolicznościach proponowany w artykule algorytm posiada najlepsze parametry, ponieważ wymaga wykonania najmniejszej liczby operacji arytmetycznych.

LITERATURA

- [1] Alfsmann D., Göckler H. G., Sangwine S. J. and Ell T. A. Hypercomplex Algebras in Digital Signal Processing: Benefits and Draw-backs (Tutorial). Proc. EURASIP 15th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 2007), Poznań, Poland, 2007, pp. 1322-1326.
- [2] Bayro-Corrochano Eduardo, The Theory and Use of the Quaternion Wavelet Transform, Journal of Mathematical Imaging and Vision, 2006, Volume 24, Issue 1, pp. 19– 35.
- [3] Bülow T. and Sommer G., “Hypercomplex signals - a novel extension of the analytic signal to the multidimensional case,” IEEE Trans. Sign. Proc., vol. SP-49, no. 11, pp. 2844–2852, Nov. 2001.
- [4] De Groote H.F., On the complexity of quaternion multiplication, Infor. Process. Lett. 1975, vol.43, no.6, pp.161-164.
- [5] Ell T., “Quaternion-Fourier transforms for analysis of two-dimensional linear time-invariant partial differential systems,” in Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on, 15-17 Dec. 1993, pp. 1830–1841.
- [6] Hitzer E., Foundations of Multidimensional Wavelet Theory: The Quaternion Fourier Transform and its Generalizations, Preprints of Meeting of the Japan Society for Industrial and Applied Mathematics, Tsukuba University, 16–18 Sep. 2006, Tsukuba, Japan, pp. 66,67.
- [7] Kantor I. and Solodovnikov A., Hypercomplex numbers, Springer-Verlag, New York, 1989.
- [8] Makarov O.M. An algorithm for the multiplication of two quaternion. Computational Mathematics and Mathematical Physics. 1977, t. 17, no. 6 pp. 1574 – 1575. (in Russian).
- [9] Pei Soo-Chang, Ding Jian-Jiun, and Chang Ja-Han, Efficient Implementation of Quaternion Fourier Transform, Convolution, and Correlation by 2-D Complex FFT. IEEE Transactions on Signal Processing, vol. 49, no. 11, November 2001, pp. 2783-2797.
- [10] Rososzek S.K., Litwin A.I., Chernyaeva N.E., Fast algorithm of two hypercomplex numbers product. Announcer of the Tomsk State University „Mathematics, Cybernetics, Informatics”, 2000, no 269, pp. 66-68. (in Russian).
- [11] Schütte H.-D. and Wenzel J., “Hypercomplex numbers in digital signal processing,” in Proc. ISCAS '90, New Orleans, 1990, pp. 1557–1560.
- [12] Țariov A., Strategie racjonalizacji obliczeń przy wyznaczaniu iloczynów macierzowo-wektorowych. Metody Informatyki stosowanej, Nr 1, 2008, str. 147-158.



dr hab. inż. Alexandr Țariov
Zachodniopomorski Uniwersytet
Technologiczny w Szczecinie
Wydział Informatyki
Katedra Architektury Komputerów
i Telekomunikacji
ul. Żołnierska 49
71-210 Szczecin
tel.: 60 775 31 53
e-mail: atariov@wi.ps.pl



dr Galina Țariova
Zachodniopomorski Uniwersytet
Technologiczny w Szczecinie
Wydział Informatyki
Katedra Architektury Komputerów
i Telekomunikacji
ul. Żołnierska 49
71-210 Szczecin
tel.: 66 936 43 74
e-mail: gtariova@wi.ps.pl