

Czy prawidłowa sieć Petriego jest siecią doskonałą?

Kamil Mielcarek, Marian Adamski, Wojciech Zajac

Streszczenie: W artykule przeanalizowano właściwości sieci Petriego pod kątem możliwości wykorzystania grafów doskonałych do badania jej grafu osiągalności. Wykazano, że klasa sieci prawidłowych [1] opisuje dynamiczną przestrzeń stanów globalnych, które mogą być analizowane w czasie wielomianowym z wykorzystaniem teorii i algorytmów dla grafów doskonałych.

Słowa kluczowe: grafy doskonałe, sieci Petriego, sieci doskonałe

1. WPROWADZENIE

Współcześnie prowadzone prace badawcze w dziedzinie teorii sieci Petriego pozwalają dostrzec wyłaniające się podziały sieci na klasy. Przynależność do poszczególnych klas bardzo silnie rzutuje na właściwości, parametry oraz zakres stosowalności sieci.

W artykule podjęto próbę usystematyzowania tematyki klasyfikacji sieci Petriego w zakresie tych klas sieci, które znajdują zastosowanie w opisie rzeczywistych układów i procesów.

2. SIECI PETRIEGO W MODELOWANIU PROCESÓW DYSKRETNÝCH

Od 1960 roku znaczenie sieci Petriego do opisywania procesów współbieżnych rośnie. Nasilenie tego procesu wiąże się z używaniem wieloprocessorowych, klastrowych czy wielowątkowych systemów komputerowych. Analogicznie rozwijają się współczesne układy scalone, w których wiele procesów potencjalnie może być wykonywanych współbieżnie. Zastosowanie opisu, wykorzystującego sieci Petriego pozwala na uzyskanie pewności, że wykonany projekt będzie realizował postawione zadanie poprawnie.

Mimo, że tematyka korzystania z sieci Petriego jest rozwijana od wielu lat, część rozwiązań nadal nastrocza problemy. Szczególnie problematyczne jest dobre określenie relacji współbieżności w konkretnych klasach sieci Petriego [1], znane są także kontrowersyjne sposoby interpretacji sieci i opisu relacji [3]; odrębnym problemem jest również zagadnienie znajdowania szybkich a zarazem wydajnych algorytmów potrafiących weryfikować właściwości poszczególnych sieci Petriego.

2.1. POJĘCIA PODSTAWOWE

Na potrzeby prowadzenia dalszego wywodu niezbędne jest wprowadzenie kilku pojęć podstawowych.

Sieć Petriego (ang. Petri Net) jest trójką $N=(S, T, F)$, przy $S \cap T = \emptyset$ oraz $F \subseteq (S \times T) \cup (T \times S)$. W tym zapisie S jest zbiorem miejsc, T jest zbiorem tranzycji natomiast F jest relacją połączeń między miejscami i tranzycjami.

Wierzchołek sieci definiuje się jako $x \in X = S \cup T$, gdzie dla każdego x definiuje się zbiór poprzedzający $\bullet x$ zdefiniowany jako $\bullet x = \{y \in X \mid (y, x) \in F\}$ oraz zbiór następników $x \bullet$ definiowany jako $x \bullet = \{y \in X \mid (x, y) \in F\}$.

W artykule przyjmuje się rozważanie sieci skończonych (ang. finite) i sieci połączonych (ang. connected), chyba, że zostanie to wyraźnie zaznaczone inaczej.

Znakowana sieć Petriego jest reprezentowana jako $\Sigma=(S, T, F, M^0)$ gdzie $N=(S, T, F)$ jest siecią z oznakowaniem początkowym M^0 .

Sieć jest nazywana S-siecią (ang. S-net) wtedy i tylko wtedy $\forall t \in T \mid \bullet t = 1 = t \bullet$.

Sieć jest nazywana T-siecią (ang. T-net) wtedy i tylko wtedy $\forall s \in S \mid \bullet s = 1 = s \bullet$.

Σ jest bezpieczna (ang. safe) wtedy i tylko wtedy gdy $\forall s \in S \mid M(s) \leq 1$ w każdym M^n osiągalnym z M^0 .

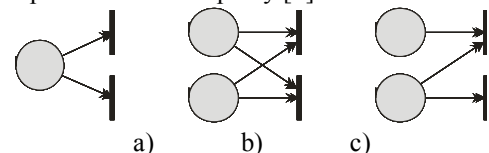
Σ jest żywa (ang. live) wtedy i tylko wtedy, gdy $\forall M$ osiągalnych z $M^0 \forall t \in T \exists M^1$ osiągalne z M^1 .

W procesie projektowania rzeczywistego układu za pomocą sieci Petriego konieczne jest aby sieć spełniała warunek bezpieczeństwa oraz warunek żywotności. Niespełnienie tych warunków może powodować wadliwą pracę układu, dyskwalifikując taki projekt. W dalszych rozważaniach rozważane będą sieci skończone i połączone.

2.2. PRAWIDŁOWA SIEĆ PETRIEGO

Dla ogólnej klasy sieci Petriego mówi się, że **sieć jest prawidłowa** (ang. proper) wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego znakowania istnieje sekwencja odpaleń tranzycji prowadzące do znakowania początkowego. Oznacza to, że system jest w stanie powrócić do stanu początkowego.

Sieciami prawidłowymi przedstawionymi w [1] są sieci typu maszyna stanów, sieci EFC (ang. Extended Free Choice) - sieć rozszerzonego wyboru (Rys. 1. b) i ich podsieci oraz szersza, nie sprecyzowana jeszcze i trudna do rozpoznania podklasa sieci regularnych, spełniająca warunki przedstawione w pracy [1].



Rys. 1. Fragment sieci swobodnego wyboru a), rozszerzonego swobodnego wyboru b) oraz nie będący siecią ani swobodnego, ani rozszerzonego swobodnego wyboru c)

W pracy [1] wyróżnia się klasę sieci pokrywanych S-sieciami, w których S-sieci są sieciami prawidłowymi. Według definicji taka sieć jest S-pokrywalna, jeśli istnieje zbiór cov S-komponentów. Ten sam autor definiuje S-sieć jako sieć w której zachodzi $\bullet t = 1 = t \bullet$.

2.3. DOSKONAŁA SIEĆ PETRIEGO

Pojęcie doskonałości sieci opisywane jest przez wykorzystanie grafów doskonałych. Różnica między grafem w ogólności przedstawiają zależności (1) i (2).

$$\varpi(G) \leq \chi(G) \text{ oraz } \alpha(G) \leq \kappa(G) \quad (1)$$

$$\varpi(G) \leq \chi(G) \text{ oraz } \alpha(G) \leq \kappa(G) \quad (2)$$

Graf doskonały dla pełnego dowodu spełnia następujące właściwości udowodnione w [5]:

$$(\text{wł. I}) \quad \omega(G_A) = \chi(G_A) \text{ dla } \forall A \subseteq V \quad (3)$$

$$(\text{wł. II}) \quad \alpha(G_A) = \kappa(G_A) \text{ dla } \forall A \subseteq V \quad (4)$$

$$(\text{wł. III}) \quad \omega(G_A) \alpha(G_A) \geq |A| \text{ dla } \forall A \subseteq V \quad (5)$$

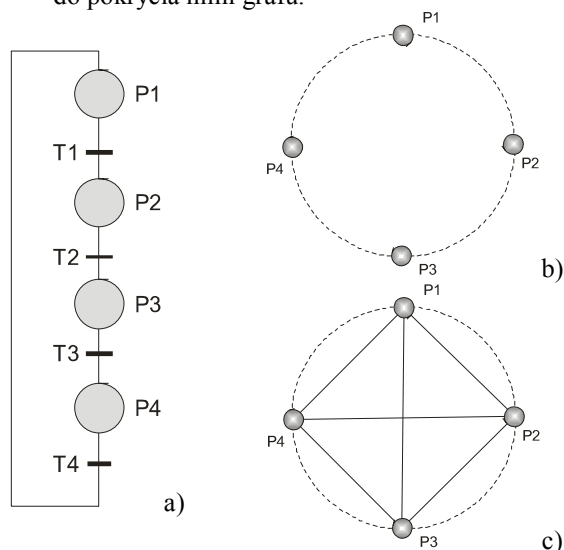
gdzie:

$\chi(G)$ - liczba chromatyczna - minimalna liczba kolorów do pokolorowania grafu,

$\varpi(G)$ - liczba klikowa - wielkość największego grafu pełnego (liczebność największej klik),

$\alpha(G)$ - liczba stabilności - liczba wierzchołków największego zbioru niezależnego,

$\kappa(G)$ - liczba pokrycia - minimalna liczba klik do pokrycia nimi grafu.



Rys. 2. Maszyna stanów a), jej graf sekwencyjności rzeczywistej b) oraz graf współbieżności rzeczywistej c)

Na rysunku 2. c) przedstawiony jest przykładowy graf, dla którego $\omega(G) = \alpha(G) = 4$ oraz $\alpha(G) = \kappa(G) = 1$. Ten graf jest grafem doskonałym.

Doskonałą siecią Petriego nazywamy prawidłową sieć Petriego, według [2] której graf współbieżności i graf sekwencyjności są grafami doskonałymi spełniającymi (3), (4), (5) oraz są swoimi dopełnieniami.

Analiza przykładu z rysunku 2 pokazuje, że graf opisujący współbieżność (z konstrukcji także sekwencyjność) zawsze będzie opisany grafem doskonałym, gdzie GS będzie bez krawędzi, natomiast GW będzie grafem pełnym. Sieci maszyn stanów są przez konstrukcję sieciami doskonałymi.

2.4. WSPÓLBIEŻNOŚĆ STRUKTURALNA I RZECZYWISTA

Z uwagi na różnice wyznaczania grafów współbieżności oraz pojęcia współbieżności strukturalnej i współbieżności rzeczywistej należy wprowadzić kilka dodatkowych definicji (na podst. [1], [2] i [3]):

Graf Współbieżności rzeczywistej (GW_R) to graf otrzymywany z grafu osiągalności, reprezentujący rzeczywistą współbieżność między miejscami sieci Petriego.

Graf Współbieżności strukturalnej (GW_S) to graf wyznaczany na podstawie relacji strukturalnego następstwa (algorytm w [1]) przedstawiający potencjalną równoległość sugerowaną przez konstrukcję sieci Petriego.

Graf Sekwencyjności rzeczywistej (GS_R - inaczej graf niewspółbieżności rzeczywistej) wyznaczany jest na podstawie cechowania sieci Petriego. (por. p-kolorowanie w [4]).

Graf Sekwencyjności strukturalnej (GS_S - inaczej graf niewspółbieżności strukturalnej) wyznaczany jest jako dopełnienie GW_S.

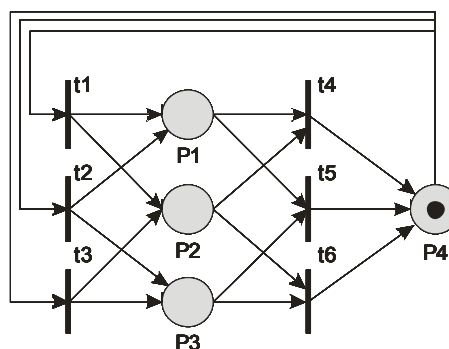
Należy zwrócić uwagę na to, że grafy GW_R = /GS_R oraz GW_S = /GS_S.

Z uwagi na stosowanie sieci Petriego do rzeczywistych układów cyfrowych pod uwagę w całym artykule brane są grafy współbieżności i sekwencyjności rzeczywistej.

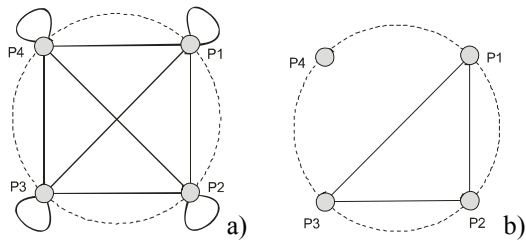
Analizując zależności podane w [1], dotyczące sieci EFC konieczne jest, aby relacja współbieżności strukturalnej i rzeczywistej były sobie równe ($\parallel = \parallel^A$). W takim przypadku zachodzi zależność, w której sieć EFC jest siecią dekomponowalną na S-sieci. Skoro S-sieci z definicji są sieciami doskonałymi, tak samo jak maszyny stanów, można stwierdzić, że sieci EFC, w których $\parallel = \parallel^A$ są sieciami doskonałymi.

Przypadek, w którym $\parallel \neq \parallel^A$ przedstawiono na rysunku 3 natomiast GW na rysunku 4. Powstające dla takiej sieci grafy współbieżności i sekwencyjności nadal są grafami doskonałymi. Powstają w nich pozorne stany globalne, złożone ze sklejonych rzeczywistych stanów globalnych. Pozorny stan globalny, złożony ze stanów lokalnych P1, P2 i P3, składa się z rzeczywistych stanów globalnych P_{1,2}, P_{2,3} i P_{1,3} (rysunek 5).

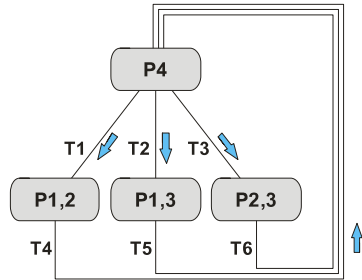
Jest to przesłanką, kładącą umieszczenie podklasę sieci właściwych wewnątrz klasy sieci doskonałych.



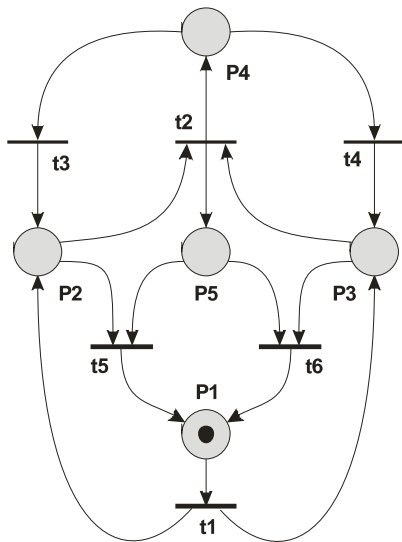
Rys. 3. Żywa i bezpieczna sieć z [1] nie będąca EFC



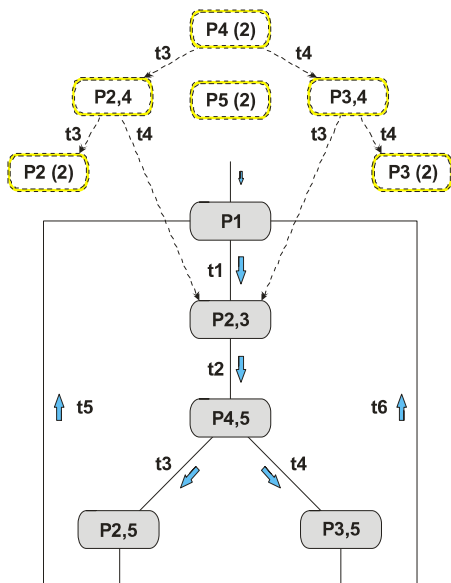
Rys. 4. Graf współbieżności strukturalnej $GW_S ||^A$ a) oraz graf współbieżności rzeczywistej $GW_R ||$ b)



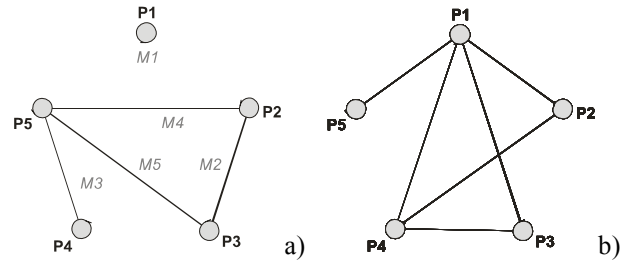
Rys. 5. Graf osiągalności GO sieci, przedstawionej na rysunku 3



Rys. 6. Przykład nieprawidłowo zaprojektowanej sieci Petriego [6]



Rys. 7. Graf osiągalności GO sieci z rys. 6



Rys. 8. Graf współbieżności rzeczywistej GWR a) i graf sekwencyjności GSR b) dla sieci z rys. 6

Aby uniknąć powstawania stanów pozornie współbieżnych, których przykład widać na rysunku 8, wykonanym dla sieci z rysunku 6, na podstawie grafu osiągalności (rysunek 7), należy analizować grafy współbieżności i sekwencyjności wyznaczone bezpośrednio z wejściowej sieci Petriego, które powinny spełniać:

$$GW_R = /WS_R \quad (6)$$

$$GW_S = /GS_S \quad (7)$$

Przy założeniu wyznaczania GS na podstawie dopełnień GW jak i przy założeniu wyznaczania GW na podstawie dopełnień GS oraz $|| \subseteq ||^A$.

$$GW_R \subseteq GW_S \quad (8)$$

$$GS_R \subseteq GS_S \quad (9)$$

W ogólności zachodzą też relacje:

$$GW_R \subseteq /GS_S \quad (10)$$

$$GW_S \supseteq /GS_R \quad (11)$$

Dla sieci prawidłowej, gdzie $|| = ||^A$ otrzymuje się następujące zależności

$$GW_R = GW_S \quad (12)$$

$$GS_R = GS_S \quad (13)$$

Jednak GW_R wyznaczany z GS_R przez dopełnienie może być inny od GW_R^D (ang. Dynamic - dynamicznej) wyznaczonego bezpośrednio z sieci

Analogicznie GW_S wyznaczany z GS_S może być inny od GW_S^D wyznaczonego na podstawie sieci.

Z uwagi na $|| = ||^A$ otrzymamy

$$GW_R^D = GW_S^D \quad (14)$$

Sytuacja, w której (6) i (7) nie zachodzą a sieć opisująca rzeczywisty układ jest żywa i bezpieczna, prowadzi do wniosku, że sieć nie została poprawnie zaprojektowana i najprawdopodobniej istnieje w niej błąd. Pochodzenie błędu będzie wiąże się z postulatem Petriego [7], mówiącym o jedności miejsca i czasu, która musi zostać spełniona w przypadkach opisywania rzeczywistych układów cyfrowych. W takim przypadku zdarzenia zachodzą w konkretnym czasie a ich rezultaty są widoczne w rzeczywistych miejscach.

Stwierdzenie czy sieć prawidłowa jest siecią żywą nie warunkuje ani nie wpływa na przynależność do sieci doskonałych. Istnieje możliwość zbadania żywotności sieci z użyciem zależności grafu osiągalności i grafów doskonałych [2] i nie wpływa na analizę.

Sieci Petriego opisujące rzeczywiste układy, które nie są sieciami doskonałymi można poddać próbie naprawy, jednak dokładane miejsca powodują, że powstała sieć będzie należeć do sieci doskonałych - o ile podczas

naprawy nie zostaną popełnione kolejne błędy. Przykład naprawy sieci można odszukać w [2].

Brak doskonałości sieci bardzo często wpływa na jej prawidłowość i taka sieć nie daje się pokryć składowymi automatowymi, jednak zależność między przynależnością do sieci prawidłowych i sieci doskonałych nie jest równoważna.

Rozszerzenie wnioskowania prac [1] można znaleźć w [3] jednak komplikacja i niestandardowe podejście powodują, że analiza zagadnień opisywanych w pracy [3] jest czasochłonna i stanowić będzie ona kierunek dalszych prac.

3. PODSUMOWANIE

W wyniku analizy materiałów literaturowych oraz przeprowadzonych na ich podstawie prac własnych można dojść do wniosku, że sieci Petriego, których graf współbieżności jest opisany grafem doskonałym, są sieciami bezpiecznymi przy spełnieniu (6). Jednocześnie na podstawie grafu osiągalności sieci (określenia jej parametrów) można określić czy sieć ta będzie siecią żywą.

Zależności można wyrazić w postaci szeregu twierdzeń sformułowanych w oparciu o wnioski, przedstawione także w pracy [1].

Twierdzenie (I). Jeśli sieci EFC są sieciami prawidłowymi to ich grafy sekwencyjności dynamicznej są opisane grafami doskonałymi [1].

W wyniku analizy prac [1] i [3], a także rozważań i wywodów, przeprowadzonych w [2], sformułowano kolejne twierdzenia.

Twierdzenie (II). Dla żywych i ograniczonych sieci swobodnego wyboru zachodzi równość rzeczywistej relacji współbieżności i strukturalnej relacji współbieżności $\parallel = \parallel^A$ [1].

Twierdzenie (III). Graf współbieżności sieci Petriego dającej się poprawnie pokryć maszynami stanów jest opisany grafami doskonałymi [2].

Twierdzenie (IV). Dobrze zdefiniowana sieć, w której brak stanów pozornie współbieżnych ($\parallel = \parallel^A$) jest żywa i ograniczona a relacja współbieżności jest opisana grafami doskonałymi [2].

Powyższe twierdzenia oraz analiza przeprowadzona w [1] potwierdza, że sieci prawidłowe, rozumiane zgodnie z definicjami [1] są sieciami dekomponowanymi na skończone maszyny stanów, które prze konstrukcję będą opisane grafami doskonałymi a ich graf współbieżności rzeczywistej oraz graf sekwencyjności rzeczywistej są własnymi dopełnieniami. Zgodnie z definicją sieci doskonałych [2] oraz zachowując zależności współbieżności strukturalnej jak i rzeczywistej, składowe będą sieciami doskonałymi. Sieci prawidłowe są nadzbiorem sieci doskonałych. Dalsze prace będą skierowane na znalezienie informacji czy zbiory sieci prawidłowych i sieci doskonałych są identyczne. Prace [1] wskazują, że istnieje część jeszcze nie przeanalizowanych sieci mogących wypełnić powstałą lukę.

Udowodnienie, że sieci prawidłowe są sieciami doskonałymi korzystnie wpłynęło by na rozwój oprogramowania wspomagającego automatyczną syntezę i weryfikację układów cyfrowych, przez implementacje

algorytmów działających na grafach doskonałych. Dzięki temu algorytmy pokrewne z kolorowaniem itp. Daje się wykonać w czasie wielomianowym przy uzyskaniu wyników dokładnych (nie przybliżonych).

LITERATURA

- [1] Kovalyov A.V.: „Concurrency Relation and the Safety Problem for Petri Nets”, *Institute of Engineering Cybernetics of Belarusian Academy of Science*, Minsk 1992
- [2] Mielcarek K.: „Perfect Graphs in Digital Circuits Design”, *PhD Thesis, University of Zielona Góra*, Zielona Góra 2010
- [3] Janicki R.: „Nets, sequential components and concurrency relations”, *Institute of mathematics, Warsaw Technical University*, Warsaw 1982
- [4] Węgrzyn M.: „Hierarchiczna implementacja współbieżnych kontrolerów cyfrowych z wykorzystaniem FPGA”, *Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, Wydział elektroniki i Technik Informatycznych*, Warszawa, 1998
- [5] Lovász L.: „A Characterization of Perfect Graphs”, *Journal of Combinatorial Theory*, 1972
- [6] Carmona J., Colom J.-M., Cortadella J., García-Vallés F.: „Synthesis of Asynchronous Controllers Using Integer Linear Programming”, *IEEE Transactions on Computer-Aided Design of Integrated Circuits and Systems*, Vol. 25, No. 9, 2006
- [7] Petri C. A.: „Kommunikation mit Automaten”, *Institut für Instrumentelle Mathematik, Schriften des IIM*, Nr. 3, 1962



dr inż. Kamil Mielcarek
Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Elektrotechniki, Informatyki
i Telekomunikacji
Instytut Informatyki i Elektroniki
ul. prof. Z. Szafrana 2,
65-246 Zielona Góra
tel.: +48-68-328 2599
e-mail: K.Mielcarek@iie.uz.zgora.pl



prof. dr hab. inż. Marian Adamski
Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Elektrotechniki, Informatyki
i Telekomunikacji
Instytut Informatyki i Elektroniki
ul. prof. Z. Szafrana 2
65-246 Zielona Góra
tel.: +48-68-328 2219
e-mail: M.Adamski@iie.uz.zgora.pl



dr inż. Wojciech Zajac
Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Elektrotechniki, Informatyki
i Telekomunikacji
Instytut Informatyki i Elektroniki
ul. prof. Z. Szafrana 2
65-246 Zielona Góra
tel.: +48-68-328 2599
e-mail: W.Zajac@iie.uz.zgora.pl