

Zastosowanie kolorowania hipergrafów w procesie dekompozycji równoległej automatów współbieżnych

Monika Wiśniewska, Remigiusz Wiśniewski

Streszczenie: W artykule przedstawiono nowatorski sposób dekompozycji równoległej automatów współbieżnych na podsieci automatowe. Metoda bazuje na wyznaczeniu, a następnie pokolorowaniu hipergrafu osiągalności sieci Petriego. Znalezione w ten sposób zbiory wierzchołków monochromatycznych odpowiadają poszczególnym podsieciom automatowym. Proponowany sposób porównano z rozwiązaniami tradycyjnymi, bazującymi na kolorowaniu grafów współbieżności miejsc sieci Petriego. Przedstawiono i omówiono szczegółowe wyniki badań.

Słowa kluczowe: dekompozycja sieci Petriego, hipergraf osiągalności, silne kolorowanie hipergrafów, podsieci typu automatowego.

1. WPROWADZENIE

Wiele metod dekompozycji systemów dyskretnych, stosowanych podczas analizy lub syntezy układów cyfrowych wykorzystuje klasyczne grafy nieskierowane [5,6]. Wzrost skomplikowania układów cyfrowych wymusza modyfikację już istniejących algorytmów, tak, aby abstrakcyjne modele w zwarty, intuicyjny sposób odzwierciedlały najistotniejsze cechy projektowanych struktur. Jednym z możliwych rozwiązań tego problemu może być zastosowanie hipergrafów, będących uogólnieniem grafów nieskierowanych [3,5,8]. Zastosowanie hipergrafów do przeprowadzania operacji stosowanych w technice cyfrowej, wydaje się intuicyjne, bardziej przejrzyste i efektywniejsze od klasycznych grafów nieskierowanych. Warto w tym miejscu podkreślić fakt, że wiele metod analizy systemów dyskretnych bazuje na przekształceniach macierzowych, które mogą być uważane za operacje hipergrafowe (np. minimalizacja funkcji logicznych [6], redukcja rozmiaru mikroinstrukcji[8]).

W artykule przedstawiono metodę dekompozycji równoległej dyskretnych systemów współbieżnych opisanych siecią Petriego, przeprowadzanej za pośrednictwem dekompozycji hipergrafów. Celem dekompozycji jest podział sterownika logicznego na współbieżne moduły, z których każdy może być optymalizowany i syntezy z wykorzystaniem klasycznej teorii automatów cyfrowych. Sposób dekompozycji sieci Petriego z wykorzystaniem kolorowania grafu współbieżności lub wyszukiwania

pokrycia klikami dopełnienia grafu współbieżności (a tym samym grafu niewspółbieżności, czyli grafu następstwa), jest już ogólnie znany [1,2,4,7]. Opracowując nową metodę, wzięto pod uwagę fakt, że hipergraf współbieżności miejsc sieci Petriego oprócz informacji o relacji między każdą parą miejsc przekazuje dodatkowe dane o klikach, odpowiadających wcześniej wyznaczonym stanom globalnym [8].

2. PODSTAWOWE DEFINICJE

W celu przedstawienia algorytmu dekompozycji sieci Petriego, niezbędne będzie wprowadzenie podstawowych pojęć związanych z sieciami Petriego oraz hipergrafami.

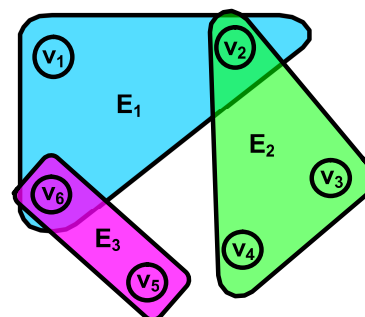
2.1. HIPERGRAFY

Pojęcie hipergrafu pojawiło się w drugiej połowie ubiegłego stulecia. W 1973 roku francuski matematyk Claude Berge opublikował monografię p.t. „Grafy i Hipergrafy”, w której sformalizował i ujednolicił podstawowe definicje dotyczące teorii hipergrafów [3,5].

Hipergraf jest rozszerzeniem pojęcia grafu. Jego krawędzie, nazywane hiperkrawędziami, mogą być incydentne do dowolnej liczby wierzchołków [3]. Formalnie, hipergraf H definiuje dwójka:

$$H = (V, E), \quad (1)$$

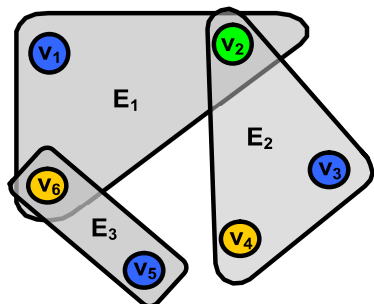
gdzie $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, jest dowolnym, niepustym zbiorem wierzchołków; $E = \{E_1, \dots, E_m\}$, jest zbiorem krawędzi hipergrafu, czyli podzbiorem zbioru $P(V)$ wszystkich możliwych niepustych zbiorów, których elementy należą do V . Rysunek 1 obrazuje przykładowy hipergraf H_1 .



Rys. 1. Hipergraf H_1

Kolorowanie wierzchołkowe hipergrafu (zwane też silnym kolorowaniem hipergrafu [5] lub po prostu kolorowaniem hipergrafu) to przyporządkowanie każdemu

wierzchołkowi hipergrafu jednego wybranego koloru w taki sposób, aby dwa sąsiednie wierzchołki (czyli takie, które są połączone hiperkrawędzią) nie miały tego samego koloru. Jeden z możliwych sposobów kolorowania hipergrafu H_I zaprezentowano na rys. 2. W przedstawionym przykładzie wykorzystano trzy kolory. Wierzchołki v_1 , v_3 oraz v_5 oznaczono kolorem pierwszym, v_2 – drugim, natomiast v_4 i v_6 – trzecim.

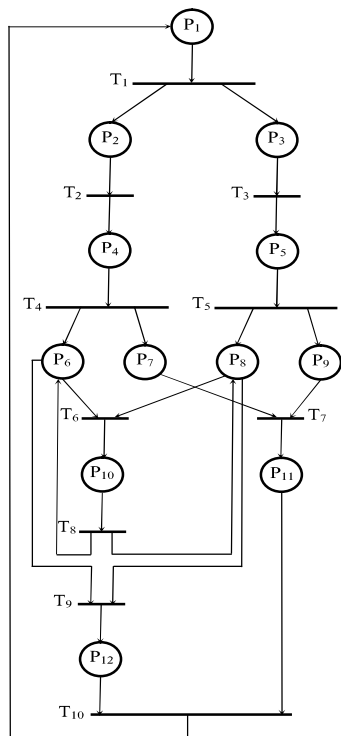


Rys. 2. Przykład kolorowania hipergrafu H_I

Operacja kolorowania hipergrafu z wykorzystaniem minimalnej liczby kolorów jest klasyfikowana jako problem NP-trudny. Dlatego też powstało wiele metod poszukujących rozwiązań przybliżonych. Do najpopularniejszych należą metody kolorowania sekwencyjnego, opierające się o algorytmy zachłanne [3,5,6].

2.2. SIĘĆ PETRIEGO

Sieć Petriego to dwudzielny graf skierowany, o dwóch rodzajach wierzchołków: miejscach i tranzycjach, które są połączone skierowanymi łukami. Przykładowa sieć Petriego PN_I przedstawiona została na rys. 3.



Rys. 3. Sieć Petriego PN_I

Taki sposób reprezentacji w wygodny sposób pozwala opisywać zjawiska zachodzące współbieżnie. Miejsca przedstawiane są jako okręgi, tranzycje jako

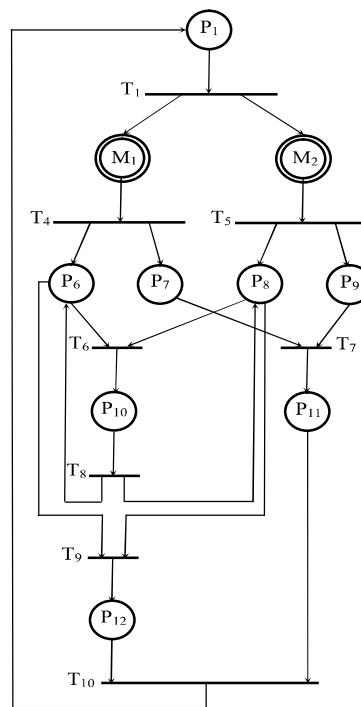
pogrubiony odcinek lub prostokąt, natomiast łuki jako krawędzie zakończone strzałkami.

3. IDEA PROPONOWANEJ METODY

Proponowana metoda dekompozycji sieci Petriego przypomina tradycyjny sposób dekompozycji sieci Petriego na podsieci typu automatowego z tym, że zamiast klasycznych grafów, wykorzystano hipergrafy.

Poniżej przedstawiono poszczególne kroki dekompozycji sieci Petriego, opartej o zastosowanie kolorowania hipergrafów.

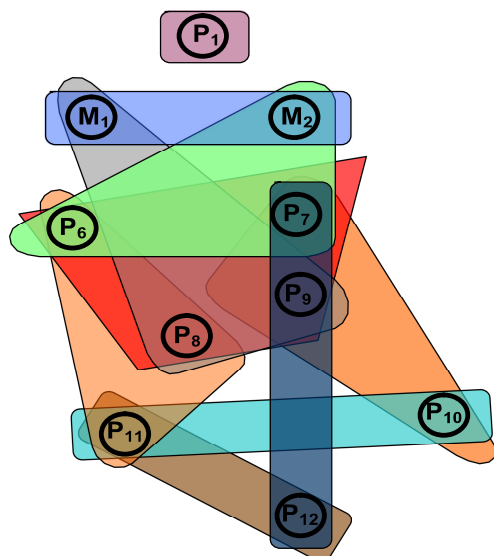
1. **Utworzenie makrosieci.** Na tym etapie należy określić makrosieć, czyli skondensowaną wersję danej sieci Petriego [1,7], zachowującą jej podstawową strukturę i właściwości. Celem tej operacji jest usunięcie z sieci fragmentów o charakterze sekwencyjnym, które podczas procesu analizy nie wpłyną na jej ostateczny wynik, a ich obecność jedynie zwiększa czas całego procesu dekompozycji. Utworzone makromoduły zawierają jedynie tranzycje wielowejściowe i wielowyjściowe oraz miejsca zastępujące jednoznakowe fragmenty sieci. Rysunek 4 ilustruje sieć Petriego z rys. 3 z wyznaczonymi makromiejscami (M_1 oraz M_2). Miejscom P_2 i P_4 odpowiada makromiejsce M_1 , natomiast miejscom P_3 i P_5 odpowiada makromiejsce M_2 .



Rys. 4 Sieć PN_I z utworzonymi makromiejscami

2. **Wyznaczenie hipergrafu osiągalności.** Na podstawie makrosieci sporządzonej w poprzednim etapie, wyznaczony zostaje hipergraf osiągalności (znakowań). Czynność ta polega na analizowaniu zmian oznakowania sieci w miarę realizacji (odpalania) gotowych tranzycji i zapisywaniu możliwych stanów. Wierzchołki hipergrafu odpowiadają poszczególnym makromiejscom, natomiast każda hiperkrawędź zawiera zbiór miejsc oznakowanych w danym stanie.

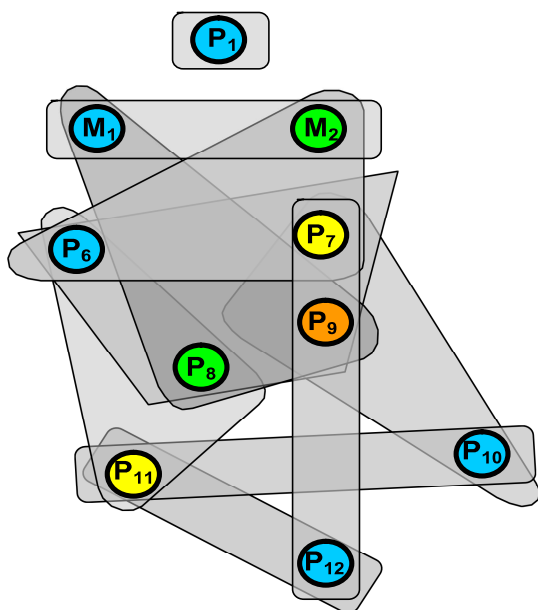
Sieć z rys. 4. zawiera 10 miejsc, tyle też wierzchołków mieć będzie odpowiadający jej hipergraf osiągalności H_{PN_I} . Analiza sieci pokazuje, że istnieje 10 możliwych stanów (rys. 5).



Rys. 5. Hipergraf osiągalności H_{PN_I} dla sieci PN_I

3. **Kolorowanie hipergrafu.** Operacja ta polega na oznaczeniu każdego wierzchołka hipergrafu w taki sposób, aby dwa wierzchołki sąsiednie miały zawsze różne kolory. Poszczególne kolory wyznaczają zbiory makromiejsc niewspółbieżnych (sekwencyjnych). Każdy taki zbiór to pojedynczy automat sekwencyjny.

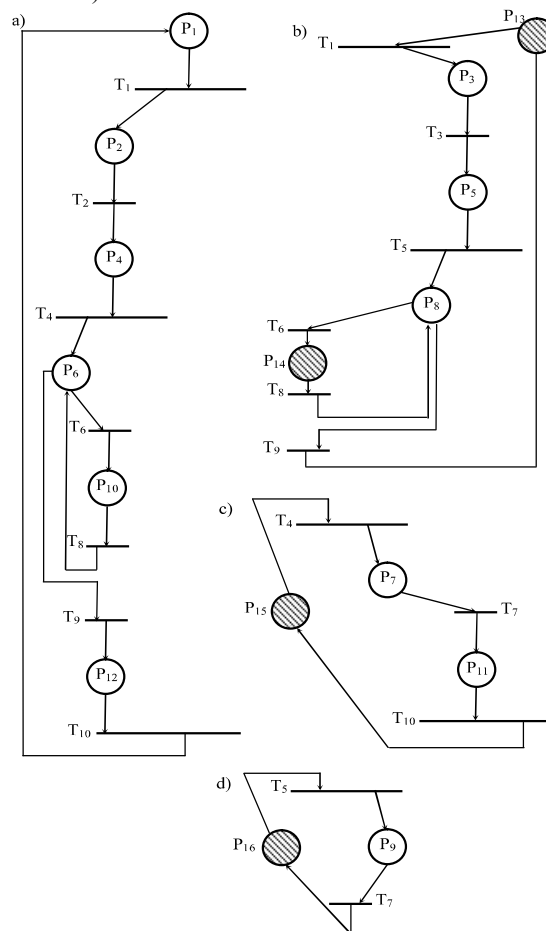
Analizowany hipergraf został pokolorowany czterema kolorami (rys. 6). Pierwszym kolorem oznaczono wierzchołki: P_1 , M_1 , P_6 , P_{10} , P_{12} , drugim M_2 i P_8 , trzecim P_7 i P_{11} , natomiast czwartym pokolorowano wierzchołek P_9 .



Rys. 6. Pokolorowany hipergraf osiągalności H_{PN_I}

Jeżeli zbiór nie zawiera początkowo oznakowanego miejsca sieci, to dodaje się do niego dodatkowe miejsce spoczynkowe, zawierające znak (np. miejsce P_{13} na rys. 7).

Rysunek 7 przedstawia podział sieci Petriego PN_I na podsieci typu automatowego. W oparciu o kolorowanie hipergrafu H_{PN_I} prezentowana sieć została podzielona na 4 podsieci automatowe (a, b, c oraz d).



Rys. 7. Zdekomponowana sieć Petriego PN_I

4. WYNIKI PRZEPROWADZONYCH BADAŃ

Przedstawiona metoda dekompozycji sieci Petriego z wykorzystaniem kolorowania hipergrafów została porównana z rozwiązaniami tradycyjnymi, opartymi o kolorowanie klasycznych grafów nieskierowanych. W tym celu wykorzystano bibliotekę testów (tzw. *benchmarks*) opracowaną w Uniwersytecie Zielonogórskim. Badane przykłady bazowały zarówno na sieciach Petriego opisujących realne systemy dyskretne (takie jak np. sterownik dozownika objętościowego, system reaktora chemicznego, itd.), jak i systemy hipotetyczne. Głównym celem przeprowadzonych eksperymentów było porównanie szybkości wykonania metod kolorowania hipergrafów oraz grafów. W obu przypadkach wykorzystano algorytm zachłanny kolorowania sekwencyjnego bez uporządkowania. Aby wyniki eksperymentów były jak najbardziej miarodajne, zarówno hipergraf osiągalności, jak i równoważny mu graf osiągalności zostały zapisane w postaci macierzy incydencji.

Tabela 1 przedstawia wyniki przeprowadzonych eksperymentów. Zestawienie prezentuje wybrane testy spośród ponad 300. W kolumnach tabeli zamieszczono:

- nazwę testu;
- liczbę miejsc sieci Petriego;

- wyznaczoną liczbę kolorów (niezależnie od przyjętej struktury (hipergraf lub graf) uzyskano tę samą liczbę kolorów);
- czas wykonania algorytmu opartego o teorię hipergrafów (wyrażony w milisekundach);
- czas wykonania algorytmu bazującego na teorii grafów (wyrażony w milisekundach);
- porównanie czasów wykonania algorytmów hipergrafowych z grafowymi (wyrażone procentowo);
- porównanie szybkości algorytmów (ile razy hipergraf jest szybszy/wolniejszy od grafów).

Z tabeli 1 wynika, że proponowany algorytm zawsze jest szybszy (średnio około 60 razy) od rozwiązań tradycyjnych, bazujących na klasycznych grafach osiągalności. Wynika to ze struktury hipergrafów, które przechowują pełną informację o klikach, co ma szczególne znaczenie w przypadku kolorowania (czyli powiązania pomiędzy poszczególnymi wierzchołkami). W przypadku grafów, zależność pomiędzy więcej niż dwoma wierzchołkami musi zostać dodatkowo wyznaczona.

Rezultaty eksperymentów pokazują, że zastosowanie hipergrafów jest szczególnie efektywne w przypadku relatywnie dużych sieci Petriego (ponad 100 miejsc), gdzie algorytm kolorowania hipergrafów może być nawet ponad półtora tysiąca razy szybszy niż odpowiadająca mu metoda kolorowania grafów.

5. PODSUMOWANIE

W referacie zaprezentowano metodę dekompozycji sieci Petriego na podsieci typu automatowego, opartą o kolorowanie hipergrafu osiągalności. Zaprezentowano szczegółowe wyniki przeprowadzonych badań, w których proponowane rozwiązanie porównano z klasycznymi metodami opartymi o kolorowanie grafów osiągalności. Wyniki eksperymentów pokazały, że prezentowany algorytm jest znacznie szybszy od dotychczas stosowanych rozwiązań (nawet 1600 razy w przypadku sieci zawierających 200 miejsc).

LITERATURA

- [1] Adamski M., Karatkievich A., Węgrzyn M. (ed.), *Design of Embeded Control Systems*. NY, Springer Science, 2005.
- [2] Bilinski K., Adamski M., Saul J.M., Dagless E.L., *Petri-net-based algorithms for parallel-controller synthesis*. IEE Proceedings - Computers and Digital Techniques, 1994, Vol. 141, no 6, s. 405-412.
- [3] Berge C., *Graphs and Hypergraphs*, North-Hollands Mathematical Library, Amsterdam 1976.
- [4] David R., Alla H., *Petri Nets & Grafcet. Tools for modelling discrete event systems*. Prentice Hall, New York, 1992.
- [5] Kubale M., Obszarski P., Piwakowski K., *Kolorowanie hipergrafów*. Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej 143 (2006), 83-90.
- [6] Łuba T.: *Synteza układów cyfrowych*. WKŁ, Warszawa 2003.
- [7] Valette R., *Comparative Study of Switching Representation Tool with GRAFCET and Petri Nets..* Nouv. Autom., Vol. 23, nr. 12, str. 337-382.
- [8] Wiśniewska M, Wiśniewski R., Adamski M., *Usage of hypergraph theory in decomposition of concurrent automata*, PAK., 2007, nr 7, s. 66-68



mgr inż. Monika Wiśniewska
Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Informatyki i Elektroniki

ul. Podgórna 50
65-246 Zielona Góra

e-mail:
m.wisniewska@weit.uz.zgora.pl



dr inż. Remigiusz Wiśniewski
Uniwersytet Zielonogórski
Instytut Informatyki i Elektroniki

ul. Podgórna 50
65-246 Zielona Góra

tel.: 68 328 25 26
e-mail: r.wisniewski@iie.uz.zgora.pl

Tabela 1.
Wyniki przeprowadzonych badań

Nazwa testu	Liczba miejsc	Liczba kolorów	Czas wykonania - hipergrafy [ms]	Czas wykonania - grafy [ms]	Porównanie czasów (hipergrafy/grafy)	Porównanie szybkości (grafy/hipergrafy)
Filozof	14	6	0,028	0,095	29,20%	3,424
Wózki	10	4	0,012	0,017	70,00%	1,429
Reaktor	9	2	0,008	0,008	90,00%	1,11
h50	100	74	12,092	4110,970	0,29%	339,969
h53	120	61	3,362	1168,770	0,29%	347,655
h65	140	84	9,758	8510,530	0,11%	872,201
h72	160	47	2,171	872,858	0,25%	402,081
h88	180	134	32,971	46712,800	0,07%	1416,802
h98	200	139	36,381	60007,700	0,06%	1649,411
Średnia	53,24	23,33	0,733	45,070	1,63%	61,525