

Zastosowanie funkcji autokorelacji i skwantowanych danych do obliczania wariancji estymatora wartości oczekiwanej sygnału

Elżbieta Kawecka, Sergiusz Sienkowski

Streszczenie: Celem pracy jest wyznaczenie rzeczywistej wariancji wartości oczekiwanej skwantowanego sygnału w odniesieniu do estymatorów tej wielkości obliczanych metodą klasyczną oraz na podstawie funkcji autokorelacji. W pracy zdefiniowano postać estymatora wartości oczekiwanej sygnału. Na tej podstawie wyznaczono jego wariancję. Do badań zastosowano skwantowane próbki sygnału oraz momenty zmiennej losowej. Założono, że próbki sygnału zostały skwantowane w przetworniku analogowo-cyfrowym (A-C) typu zaokrąglającego o idealnej charakterystyce kwantowania. W charakterze przykładu przedstawiono wyniki obliczeń wariancji dla sygnału sinusoidalnego, sygnałów losowych o rozkładach: równomiernym oraz Gaussa.

Słowa kluczowe: wartość oczekiwana, obciążenie, wariancja, funkcja autokorelacji, kwantowanie, przetwornik A-C

1. WPROWADZENIE

Niech przetwornik A-C będzie idealny w swoim działaniu i wszystkie możliwe błędy pomiędzy $-q/2$ a $q/2$ (q – krok kwantowania) będą równie prawdopodobne. Ponadto niech pogrupowane próbki dyskretnego w czasie i skwantowanego w amplitudzie sygnału x_q tworzą M – wymiarową zmienną losową

$$x_q = (x_q(0), x_q(1), \dots, x_q(M-1)), \quad (1)$$

gdzie M to liczba próbek sygnału.

Funkcje zmiennej losowej x_q mogą dawać początek nowym zmiennym losowym nazywanym statystykami. Typowym przykładem statystyki jest średnia z próby

$$\tilde{x}_q = \frac{1}{M} (x_q(0) + \dots + x_q(M-1)). \quad (2)$$

Statystyka (2) jest estymatorem wartości oczekiwanej zmiennej losowej $x = (x(0), \dots, x(M-1))$. Zmienna x została utworzona na podstawie pogrupowanych próbek dyskretnego w czasie sygnału pierwotnego x .

2. WARIANCJA ESTYMATORA WARTOŚCI OCZEKIWANEJ SYGNAŁU

Wariancję estymatora (2) można obliczyć na podstawie zależności [1]

$$Var[\tilde{x}_q] = E[(\tilde{x}_q)^2] - E^2[\tilde{x}_q]. \quad (3)$$

Zwróćmy uwagę, że:

$$\begin{aligned} E[\tilde{x}_q] &= E\left[\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i)\right] = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} E[x_q(i)] \\ &= \frac{1}{M} (M E[x_q]) = E[x_q], \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} E[(\tilde{x}_q)^2] &= E\left[\left(\frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i)\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{M^2} \left(\sum_{i=0}^{M-1} E[(x_q(i))^2] + \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{k=0 \\ i \neq k}}^{M-1} E[x_q(i)x_q(k)] \right) \\ &= \frac{1}{M^2} (M E[x_q^2] + M(M-1) E^2[x_q]) \\ &= \frac{1}{M} (E[x_q^2] - E^2[x_q]) + E^2[x_q]. \end{aligned} \quad (5)$$

Jednocześnie

$$\begin{aligned} E[(\tilde{x}_q)^2] &= \frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{k=0}^{M-1} E[x_q(i)x_q(k)] \\ &= \frac{2}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{\substack{k=0 \\ i \geq k}}^{M-1} R_{x_q x_q}(i-k) - \frac{1}{M} E^2[x_q] \\ &= \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left(1 - \frac{i}{M}\right) R_{x_q x_q}(i) - \frac{1}{M} E^2[x_q], \end{aligned} \quad (6)$$

gdzie $R_{x_q x_q}$ to funkcja autokorelacji zmiennej x_q .

Ostatecznie wariancję estymatora (2) można obliczyć na podstawie wzoru

$$Var_1[\tilde{x}_q] = \frac{1}{M} (E[x_q^2] - E^2[x_q]), \quad (7)$$

lub odpowiednio z zależności [2] – [4]

$$Var_2[\tilde{x}_q] = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left(1 - \frac{i}{M}\right) R_{x_q x_q}(i) - \left(1 + \frac{1}{M}\right) E^2[x_q]. \quad (8)$$

Składniki wzorów (7) i (8) można obliczyć korzystając z momentów zmiennej losowej x_q [5]

$$E[x_q^n] = (-j)^n \frac{d^n}{dv^n} \Phi_{x_q}(v) \Big|_{v=0}, \quad n > 0, \quad j = \sqrt{-1}, \quad (9)$$

gdzie

$$\Phi_{x_q}(v) = \sum_{i=-\infty}^{\infty} \Phi_x \left(v - \frac{2\pi}{q} i \right) \text{sinc} \left[\frac{q}{2} \left(v - \frac{2\pi}{q} i \right) \right], \quad (10)$$

przy czym $\text{sinc}(z) = \sin(z)/z$.

Wyznaczanie wariancji na podstawie momentów nie jest proste i wymaga znajomości postaci funkcji charakterystycznej $\Phi_x(v) = E[e^{jvx}]$ zmiennej x [1]. Łatwiej oszacować wariancję z zastosowaniem skwantowanych próbek sygnału x_q i wzoru

$$\tilde{var}_1[\tilde{x}_q] = \frac{1}{M^2} \sum_{i=0}^{M-1} (x_q(i) - \tilde{x}_q)^2, \quad (11)$$

lub zależności

$$\tilde{var}_2[\tilde{x}_q] = \frac{2}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \left(1 - \frac{i}{M} \right) \tilde{R}_{x_q x_q}(i) - \left(1 + \frac{1}{M} \right) (\tilde{x}_q)^2, \quad (12)$$

gdzie

$$\tilde{R}_{x_q x_q}(k) = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} x_q(i) x_q(i+k), \quad k = 0, 1, \dots, M-1. \quad (13)$$

Wyrażenie $\tilde{R}_{x_q x_q}$ to estymator funkcji autokorelacji $R_{x_q x_q}$ zmiennej x_q [6]. Sposób obliczania wariancji na podstawie (11) jest podejściem klasycznym, często spotykanym w literaturze.

Należy zwrócić uwagę, że (2) jest estymatorem obciążonym, a jego obciążenie zależy od operacji kwantowania [7]. Podobnie jest z estymatorami (11) i (12), jednakże ich obciążenie zależy nie tylko od operacji kwantowania. Można wykazać, że dla przetwornika A-C o nieskończenie dużej rozdzielczości, estymatory (11) i (12) są pierwotnie obciążone [1]. Obciążenie to jest ujemne, a więc daje zbyt małe oszacowanie wariancji (3). Mnożąc (11) i (12) przez $M/(M-1)$ łatwo przekształcić oba wzory do postaci estymatorów pierwotnie nieobciążonych

$$\tilde{var}_3[\tilde{x}_q] = \frac{1}{M(M-1)} \sum_{i=0}^{M-1} (x_q(i) - \tilde{x}_q)^2, \quad (14)$$

$$\tilde{var}_4[\tilde{x}_q] = \frac{2}{M-1} \sum_{i=0}^{M-1} \left(1 - \frac{i}{M} \right) \tilde{R}_{x_q x_q}(i) - \left(\frac{M+1}{M-1} \right) (\tilde{x}_q)^2. \quad (15)$$

Zależności (14) i (15) pozwalają na oszacowanie wariancji (3) w przypadku, gdy wpływ na obciążenie estymatorów ma jedynie operacja kwantowania.

2.1. WARIANCJA ESTYMATORA WARTOŚCI OCZEKIWANEJ SYGNAŁU SINUSOIDALNEGO

Niech $x=(x(0), \dots, x(M-1))$ będzie próbą z rozkładu sinusoidalnego $S(A, A_0)$ z parametrami: A - amplituda, A_0 - składowa stała sygnału. Funkcja charakterystyczna zmiennej x ma postać

$$\Phi_x = J_0(Av) e^{jA_0 v}, \quad (16)$$

gdzie J_0 to funkcja Bessela 1-go rodzaju rzędu 0 [8].

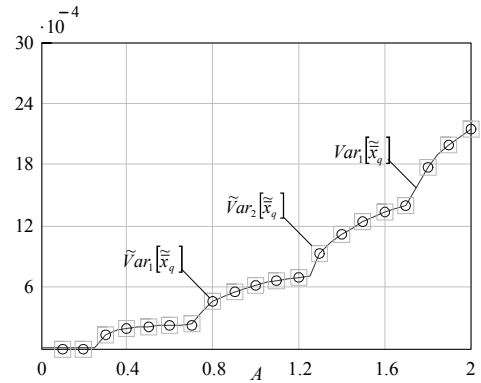
Ponieważ $E[x] = A_0$ oraz $E[x^2] = \frac{A^2}{2} + A_0^2$, to

na podstawie (7) i (9) otrzymujemy

$$\begin{aligned} Var[\tilde{x}_q] &= \frac{1}{M} A^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{12} \left(\frac{A}{q} \right)^2 \right) \\ &+ \frac{1}{\pi} \left(\frac{A}{q} \right)^{-1} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i} e^{jA_0 \frac{2\pi}{q} i} \left(\frac{1}{2\pi i} J_0 \left(2\pi i \frac{A}{q} \right) \left(\frac{A}{q} \right)^{-1} + J_1 \left(2\pi i \frac{A}{q} \right) \right) \\ &+ \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{A}{q} \right)^{-2} \sum_{i=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_0 \left(2\pi i \frac{A}{q} \right) J_0 \left(2\pi k \frac{A}{q} \right) e^{j2\pi(i+k)\frac{A_0}{q}} \frac{(-1)^{i+k}}{ik}, \end{aligned} \quad (17)$$

gdzie J_1 to funkcja Bessela 1-go rodzaju rzędu 1.

Na rysunku 1 przedstawiono wykresy wariancji estymatora wartości oczekiwanej obliczonej na podstawie momentów i skwantowanych próbek sygnału sinusoidalnego.



Rys. 1. Wariancja estymatora wartości oczekiwanej sygnału sinusoidalnego ($A_0=1.234$, $M=1000$, $q=1$)

Oznaczmy przez η_q estymatę minimalizującą sumę kwadratów błędów oszacowania wariancji na podstawie skwantowanych danych. Błędy te stanowią różnicę wariancji obliczanej na podstawie momentów i skwantowanych danych dla zmieniającej się amplitudy A sygnału

$$\eta_q = \sum_A (\tilde{var}[\tilde{x}_q] - Var[\tilde{x}_q])^2. \quad (18)$$

Wykonano eksperyment polegający na obliczeniu η_q .

Przyjęto, że $Var[\tilde{x}_q] = Var_1[\tilde{x}_q]$ oraz kolejno $\tilde{var}[\tilde{x}_q] = \tilde{var}_1[\tilde{x}_q]$ i $\tilde{var}[\tilde{x}_q] = \tilde{var}_2[\tilde{x}_q]$. Ponadto $A=0, 0.1, \dots, 5$, $A_0=1.234$, $M=1000$, $q=1$. Dodatkowo założono, że wartość η_q została znormalizowana względem ilości wygenerowanych wartości A oraz, że eksperyment wykonano $K=1$ razy. Po zakończeniu obliczeń otrzymano $\eta_{q1} = \eta_{q2} = 2.8 \cdot 10^{-11}$. Zgodnie z oczekiwaniami, podejście klasyczne (η_{q1}) i funkcja autokorelacji (η_{q2}) dały ten sam wynik.

2.2. WARIANCJA ESTYMATORA WARTOŚCI OCZEKIWANEJ SYGNAŁU LOSOWEGO O ROZKŁADZIE GAUSSA

Niech $x=(x(0), \dots, x(M-1))$ będzie próbą z rozkładu Gaussa $N(\sigma_n, \mu)$, gdzie σ_n to odchylenie standardowe,

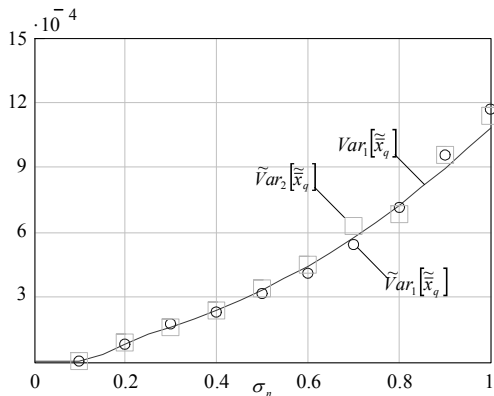
μ – wartość oczekiwana zmiennej x . Funkcja charakterystyczna zmiennej x ma postać

$$\Phi_x = e^{-0.5v^2\sigma_n^2} e^{j\mu v}. \quad (19)$$

Stąd, że $E[x] = \mu$ i $E[x^2] = \sigma_n^2 + \mu^2$ otrzymujemy

$$\begin{aligned} Var[\tilde{x}_q] &= \frac{1}{M} \sigma_n^2 \left(1 + \frac{1}{12} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^2 \right. \\ &+ 2 \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} (-1)^i e^{-0.5 \left(\frac{2\pi i \sigma_n}{q} \right)^2} e^{j2\pi i \frac{\mu}{q}} \left(\left(\frac{2\pi i \sigma_n}{q} \right)^{-2} + 1 \right) \\ &\left. + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{\sigma_n}{q} \right)^{-2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} e^{-0.5 \left(\frac{2\pi \sigma_n}{q} \right)^2 (i^2 + k^2)} e^{j2\pi (i+k) \frac{\mu}{q}} \frac{(-1)^{i+k}}{ik} \right). \end{aligned} \quad (20)$$

Na rysunku 2 przedstawiono wykresy wariancji estymatora wartości oczekiwanej obliczonej na podstawie momentów i skwantowanych próbek sygnału losowego o rozkładzie Gaussa.



Rys. 2. Wariancja estymatora wartości oczekiwanej sygnału losowego o rozkładzie Gaussa ($\mu=1.234$, $M=1000$, $q=1$)

Analogicznie jak w pkt. 2.1 wykonano eksperyment polegający na obliczeniu

$$\eta_q = \sum_{\sigma_n} (\tilde{Var}[\tilde{x}_q] - Var[\tilde{x}_q])^2 \quad (21)$$

dla zmieniających się wartości σ_n . Podczas eksperymentu przyjęto $\sigma_n=0, 0.1, \dots, 5$, $\mu=1.234$, $M=1000$. Próbkę sygnału generowano osobno stosując podejście klasyczne i funkcję autokorelacji. Ze względu na niejednoznaczność wyników oszacowań (sygnał losowy) eksperyment powtórzono $K=1000$ razy, a następnie uśredniono wyniki obliczeń. Przykładowe wyniki oszacowań η_q przedstawiono w tabeli 1.

Tabela 1.

Wyniki oszacowań η_q dla sygnału losowego o rozkładzie Gaussa

Lp.	$q=0$		$q=1$	
	$\bar{\eta}_{q1}$	$\bar{\eta}_{q2}$	$\bar{\eta}_{q1}$	$\bar{\eta}_{q2}$
	ppm	ppm	ppm	ppm
1	0.2678	0.2645	0.2568	0.2577
2	0.2598	0.2646	0.2590	0.2621
3	0.2616	0.2642	0.2574	0.2597

4	0.2705	0.2630	0.2602	0.2608
5	0.2668	0.2636	0.2605	0.2612

Obliczanie $\bar{\eta}_{q1}$ i $\bar{\eta}_{q2}$ powtórzono wielokrotnie otrzymując najczęściej $\bar{\eta}_{q1} < \bar{\eta}_{q2}$. Takie oszacowanie przestawało obowiązywać dla $K \rightarrow \infty$, $M \rightarrow \infty$ i $q \rightarrow 0$. Wówczas funkcja autokorelacji i podejście klasyczne dawały zwykle niepowtarzalne wyniki porównań $\bar{\eta}_{q1}$ i $\bar{\eta}_{q2}$ a obie metody pozwalały na uzyskanie tak samo dokładnych wyników oszacowania wariancji wartości oczekiwanej sygnału.

2.3. WARIANCJA ESTYMATORA WARTOŚCI OCZEKIWANEJ SYGNAŁU LOSOWEGO O ROZKŁADZIE RÓWNOMIERNYM

Niech $x=(x(0), \dots, x(M-1))$ będzie próbą z rozkładu równomiernego $U(A_n, A_0)$, gdzie A_n to amplituda, A_0 – składowa stała sygnału. Funkcja charakterystyczna zmiennej x ma postać

$$\Phi_x = \frac{\sin(A_n v)}{A_n v} e^{jA_0 v}. \quad (22)$$

Ponieważ $E[x] = A_0$ i $E[x^2] = \frac{A_n^2}{3} + A_0^2$, to

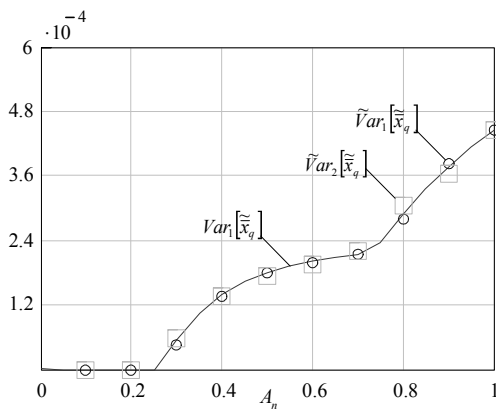
$$\begin{aligned} Var[\tilde{x}_q] &= \frac{1}{M} A_n^2 \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{12} \left(\frac{A_n}{q} \right)^2 \right. \\ &+ \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-2} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i^2} e^{j2\pi i \frac{A_0}{q}} \sin\left(2\pi i \frac{A_n}{q}\right) \left(\frac{1}{\pi i} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-1} - \text{ctg}\left(2\pi i \frac{A_n}{q}\right) \right) \\ &\left. + \frac{1}{16\pi^4} \left(\frac{A_n}{q} \right)^{-4} \sum_{\substack{i=-\infty \\ i \neq 0}}^{\infty} \sum_{\substack{k=-\infty \\ k \neq 0}}^{\infty} \sin\left(2\pi i \frac{A_n}{q}\right) \sin\left(2\pi k \frac{A_n}{q}\right) e^{j2\pi \frac{A_0}{q}(i+k)} \frac{(-1)^{i+k}}{i^2 k^2} \right). \end{aligned} \quad (23)$$

Na rysunku 3 przedstawiono wykresy wariancji estymatora wartości oczekiwanej obliczonej na podstawie momentów i skwantowanych próbek sygnału losowego o rozkładzie równomiernym.

Podobnie jak w pkt. 2.1 i 2.2 wykonano eksperyment polegający na obliczeniu wartości

$$\eta_q = \sum_{A_n} (\tilde{Var}[\tilde{x}_q] - Var[\tilde{x}_q])^2. \quad (24)$$

Podczas eksperymentu przyjęto $A_n=0, 0.1, \dots, 5$, $A_0=1.234$, $M=1000$. Próbkę sygnału generowano jak w pkt. 2.2. Eksperyment powtórzono $K=1000$ razy uśredniając wyniki obliczeń. Przykładowe wyniki oszacowań η_q przedstawiono w tabeli 2.



Rys. 3. Wariancja estymatora wartości oczekiwanej sygnału losowego o rozkładzie równomiernym ($A_0=1.234$, $M=1000$, $q=1$)

Tabela 2.
Wyniki oszacowań η_q dla sygnału losowego o rozkładzie równomiernym

Lp.	$q=0$		$q=1$	
	$\bar{\eta}_{q1}$	$\bar{\eta}_{q2}$	$\bar{\eta}_{q1}$	$\bar{\eta}_{q2}$
	ppm	ppm	ppm	ppm
1	0.01878	0.01883	0.01231	0.01241
2	0.01884	0.01858	0.01231	0.01241
3	0.01885	0.01896	0.01231	0.01241
4	0.01895	0.01907	0.01231	0.01241
5	0.01877	0.01874	0.01231	0.01241

W przypadku sygnału losowego o rozkładzie równomiernym błędy $\bar{\eta}_{q1}$ i $\bar{\eta}_{q2}$ przyjmują wartości, które wskazują, że zastosowanie funkcji autokorelacji oraz metody klasycznej daje tak samo dokładne wyniki oszacowania wariancji wartości oczekiwanej sygnału.

2.4. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono wyniki badań nad wariancją estymatora wartości oczekiwanej sygnału. Wariancję obliczono na podstawie momentów zmiennej losowej i skwantowanych danych stosując podejście klasyczne i funkcję autokorelacji.

W przypadku zastosowania funkcji autokorelacji należy liczyć się z wydłużonym czasem obliczeń. Jeżeli narzut czasowy nie jest istotny lub próba nie jest duża to dla sygnałów okresowych można stosować oba sposoby szacowania wariancji.

Dla sygnałów przypadkowych lub sygnałów okresowych ze składową losową, skwantowanych w przetworniku A-C, estymata minimalizująca sumę kwadratów błędów oszacowania wariancji może dawać większe wartości w przypadku zastosowania funkcji autokorelacji niż podejście klasyczne. Wynika to z faktu, że podczas obliczeń sygnał losowy bądź składowa losowa wraz z błędami powodowanymi kwantowaniem nie są w dostateczny sposób uśredniane. Ich uśrednienie w większym stopniu zależy od liczności próby i liczby uśrednień.

Takiej właściwości nie zaobserwowano w przypadku sygnałów pierwotnych, gdzie funkcja autokorelacji i podejście klasyczne dawały tak samo dokładne wyniki oszacowania wariancji wartości oczekiwanej sygnału.

Nie można wykluczyć, że dla dostatecznie licznej próby i dużej liczby uśrednień zastosowanie funkcji autokorelacji pozwoli na uzyskanie wyników świadczących o dokładniejszym oszacowaniu wariancji dla danych skwantowanych. Jednak w praktyce obliczanie wariancji na podstawie tej metody ograniczać się będzie do sytuacji pomiarowych, w których próba nie jest liczna, znane są wartości funkcji autokorelacji lub można je wyznaczyć na podstawie charakterystyki widmowej gęstości mocy opisującej ogólną strukturę częstotliwościową sygnału. W pozostałych przypadkach stosowane będzie zwykle podejście klasyczne.

LITERATURA

- [1] Papoulis A., *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. New York: McGraw-Hill, 1965.
- [2] Domańska A., *Ocena wariancji wyniku cyfrowej filtracji uśredniającej*, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 9, s. 750-753, 2009.
- [3] Proakis J., Manolakis D., *Digital signal processing*. Pearson Prentice Hall, 2007.
- [4] Shiavi R., *Introduction to applied statistical signal analysis*. Academic Press, Elsevier Inc., 2007.
- [5] Widrow B., Kollar I., *Quantization Noise*. Cambridge University Press, 2008.
- [6] Kawecka E., Sienkowski S., *Estymacja punktowa funkcji autokorelacji sygnałów na podstawie cyfrowych danych pomiarowych*, *Pomiary Automatyka Kontrola*, nr 7, s. 422-425, 2009.
- [7] Sienkowski S., Rutkowska M., *Identyfikacja składowych błędów średniokwadratowego cyfrowego estymatora wartości oczekiwanej sygnału*, *Materiały 17. Konferencji Modelowanie i Symulacja Systemów Pomiarowych*, Wydawnictwo Katedry Metrologii AGH, s. 17-26, 2009.
- [8] Korn G. T., *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers*. New York: McGraw-Hill, 1961.



dr inż. Elżbieta Kawecka

Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Elektrotechniki, Informatyki
i Telekomunikacji, IIE

ul. Podgórna 50
65-246 Zielona Góra

tel.: 68 32 82 599
e-mail: e.kawecka@iie.uz.zgora.pl



mgr inż. Sergiusz Sienkowski

Uniwersytet Zielonogórski
Wydział Elektrotechniki, Informatyki
i Telekomunikacji, IME

ul. Podgórna 50
65-246 Zielona Góra

tel.: 68 32 82 678
e-mail: s.sienkowski@mie.uz.zgora.pl